REVISTA DIGITAL INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 12 – NOVIEMBRE DE 2008

“LA CALCULADORA EN LA ANTIGUA GRECIA”

AUTORÍA **ANA ROVI GARCÍA**
TEMÁTICA **MATEMÁTICAS. ARITMÉTICA. HISTORIA**
ETAPA **ESO. BACHILLERATO**

Resumen

Es muy importante fomentar en nuestros alumnos y alumnas el espíritu de ingenio e investigación a la hora de abordar cualquier problema, sea en matemáticas o en otro campo.

En este artículo pretendemos dar una visión de la elegancia e ingenio de las matemáticas en la Antigua Grecia mediante la exposición de un algoritmo inventado por los matemáticos griegos.

Palabras clave

Pitágoras

Máximo común divisor

Números enteros

Algoritmo de Euclides

Ecuaciones diofánticas

1. CONTEXTO HISTÓRICO

Aunque el origen de los números debemos buscarlo en civilizaciones muy antiguas, el primer estudio serio de los números se atribuye a los Griegos y, en particular, a Pitágoras y sus discípulos.

Se sabe muy poco acerca de la vida de Pitágoras, pero aún así, vamos a intentar esbozar una pequeña semblanza de su figura.

Pitágoras nació alrededor del año 569 a. C. en una isla del mar Egeo llamada Samos. Según diversos estudios, Pitágoras se formó en Egipto y Asia Menor antes de emigrar a Sicilia con su madre.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 12 – NOVIEMBRE DE 2008

Allí inauguró Pitágoras su propia escuela en la colonia griega de Crotón, en el actual sudeste italiano. Sus escuelas tuvieron mucha aceptación, gozando de gran éxito de público.

A partir de las escuelas, Pitágoras fundó una hermandad secreta que se hizo conocida con el nombre de “Pitagóricos”. Se dice que Pitágoras daba conferencias dirigidas al gran público y otras dirigidas sólo a su comunidad pitagórica.

La comunidad Pitagórica vivía según estrictas normas de conducta, entre ellas el vegetarianismo. Pero quizá la norma más importante de la Hermandad Pitagórica consistía en mantener el secreto sobre los descubrimientos matemáticos realizados por sus miembros; secretos que debían ser mantenidos dentro del ámbito de la Hermandad.

Cuenta la leyenda que un miembro de la comunidad Pitagórica fue condenado a morir ahogado por romper su juramento de silencio y ufanarse en público de haber añadido el dodecaedro a la lista conocida de sólidos regulares.

Este estricto código de conducta y el hecho de ser una organización secreta llevaron a la Hermandad Pitagórica a dominar el mundo político de la colonia griega en Crotón.

Sin embargo, empezaron a ser impopulares hasta que fueron derrocados en una revuelta local alrededor del año 500 a. C. durante la que muchos miembros de la comunidad Pitagórica e incluso el propio Pitágoras fueron asesinados.

Aunque despojados de su influencia política, los Pitagóricos se estructuraron rápidamente como sociedad matemática y filosófica y siguieron cultivando la ciencia y las matemáticas durante otros doscientos años.

El secretismo con el que había trabajado la Hermandad Pitagórica fue abandonándose poco a poco y se empezaron a escribir tratados que contenían muchas de las enseñanzas y doctrinas de Pitágoras.

Según Pitágoras las Matemáticas estaban divididas en cuatro disciplinas:

- aritmética,
- música,
- geometría
- astronomía.

Pitágoras es especialmente recordado por sus contribuciones al estudio de la geometría entre los que se encuentran muchos teoremas sobre geometría plana, triángulos y círculos. De todos estos teoremas, el más importante es el teorema que lleva su nombre y que es básico para el desarrollo posterior de las matemáticas.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 12 – NOVIEMBRE DE 2008

En el campo de la aritmética, Pitágoras se dedicó a problemas de teoría de números de cuatro tipos:

- números triangulares, pentagonales, etc
- proporción,
- divisores
- números en sucesiones.

Pitágoras empleó ideas geométricas para interpretar y dar respuesta a muchos de estos problemas sobre teoría de números.

Los Pitagóricos estaban fascinados por los aspectos místicos del número. Se dice que el lema de la Hermandad Pitagórica era "TODO ES NÚMERO", lo que nos hace ver la idea subyacente a las teorías de Pitágoras de que todo, sea físico, metafísico o matemático está basado en los números naturales 1, 2, 3,…

Damos a continuación una pequeña visión de cómo entendía la Hermandad Pitagórica su concepto místico del número:

- El número 1 es el número que representa la razón de todas las cosas ya que generara todo los demás números.
- El número 2 es de naturaleza femenina, es decir, par. El número 3 es de naturaleza masculina, es decir, impar.
- Por lo tanto, el número 5 (= 2 + 3) representa al matrimonio, como unión de lo femenino y lo masculino
- Si vamos un poco más lejos, podemos deducir que el número 8 representa la procreación al añadir potencia (número 3) al matrimonio (número 5).

Como vemos, cada número tenía sus propias características y atributos mágicos y estaba por lo tanto relacionado con el mundo sensible y la vida. Sin embargo, el propio Pitágoras hizo añicos esta teoría con el que posiblemente sea su descubrimiento más importante.

Pitágoras demostró que es imposible hallar dos números enteros tales que el cuadrado de uno de ellos sea igual al doble del cuadrado del otro; aunque sea fácil construir parejas de cuadrados en las que uno de ellos tenga doble área que el otro.

Mediante estas observaciones, Pitágoras demostró la existencia de números irracionales.

REVISTA DIGITAL INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 12 – NOVIEMBRE DE 2008

Siguiendo el ejemplo de Pitágoras, el movimiento matemático basado en el estudio del número llegó a Alejandría, donde alrededor del año 300 a.C. se fundó la Biblioteca de Alejandría, centro de estudio de la Antigüedad.

Con espaciosas salas de lectura, salones para reuniones y conferencias y todas las posibles comodidades que ofrecía el Mundo Antiguo, la Biblioteca se convirtió en un centro de conocimiento muy importante – también de conocimiento matemático.

El fundador de la escuela matemática en Alejandría fue Euclides.

Se sabe muy poco acerca de la vida de Euclides aparte de que era de originario de Grecia y que nació alrededor del año 330 a. C. Tanto es así, que el propio nombre de Euclides ha llegado a convertirse en sinónimo de los libros que escribió, olvidándonos que detrás de esos libros había una persona.

De los varios libros que escribió Euclides, el más importante y al que debe su enorme relevancia es el libro titulado *Elementos.* Desde su primera edición en 1482 han visto la luz más de mil ediciones de esta joya de la Historia de las Matemáticas, lo que ha contribuido a que sea uno de los libros más difundidos y estudiados de toda la historia.

Euclides es reconocido fundamentalmente por sus aportaciones a la Geometría. Sin embargo sus *Elementos* constituyen una recopilación de todo el saber matemático de su época y, naturalmente, contiene mucho más que geometría.

Este gran libro está divido en 13 capítulos (o libros) de los cuales los seis primeros constituyen un tratado sobre geometría elemental del plano. El libro X trata sobre números inconmensurables y los últimos libros XII and XIII, vuelven a hablar sobre geometría, esta vez, en el espacio.

Los tres libros restantes, libros VII, VIII y IX, versan sobre teoría de números.

El Libro VII trata de distintos tipos de números: números impares, pares, cuadrados, primos, números compuestos, etc. Este libro incluye el "Algoritmo de Euclides", que pasamos a exponer a continuación.

El Libro VIII está dedicado a las propiedades de los cuadrados y cubos así como a presentar algunos resultados sobre progresiones geométricas.

El Libro IX contiene un gran número de teoremas de especial interés, siendo la joya de la corona de este libro, la demostración de Euclides de la existencia de infinitos números primos.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 12 – NOVIEMBRE DE 2008

2. ALGORITMO DE EUCLIDES

Vamos a intentar hallar el máximo común divisor de dos números.

Podemos hallar la descomposición en factores de ambos números y combinar los resultados. Este proceso supone un gran esfuerzo de cálculo…

Vamos a mostrar mediante un ejemplo el funcionamiento del Algoritmo de Euclides para hallar el máximo común divisor de dos números.

Tomemos por ejemplo los números 3108 y 5291

5291 = 1 x **3108** + **2183**

A continuación dividimos 3108 por el resto obtenido en la ecuación anterior.

3108 = 1 x **2183** + **925**

Repetimos el proceso, dividiendo en cada paso el divisor anterior por el resto obtenido

2183 = 2 x **925** + **333**

925 = 2 x **333** + **259**

333 = 1 x **259** + **74**

259 = 3 x **74** + **37**

74 = 2 x **37** + **0**

El proceso termina cuando conseguimos obtener un resto cero. Así, el último resto no nulo obtenido nos ofrece la solución al problema planteado: este resto resulta ser el máximo común divisor de los dos números dados.

C/ Recogidas Nº 45 - 6ºA 18005 Granada csifrevistad@gmail.com

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 12 – NOVIEMBRE DE 2008

Pero queremos ir un poco más lejos y ahora nos planteamos el problema de cómo hallar dos números a y b tales que

m.c.d. (3108, 5291) = *m* x **3108** + n x **5291**

Vamos a considerar el conjunto de ecuaciones que obtuvimos en el proceso de hallar el máximo común divisor de 3108 y 5291 y las vamos a reescribir en orden inverso a como surgen en el proceso anterior.

Así, empezamos por la penúltima ecuación y obtenemos la siguiente expresión numérica,

37 = **259** – 3 x **74**

Si consideramos la ecuación previa en nuestro proceso, encontramos una expresión para el resto anterior.

74 = **333** – **259**

Sustituyendo esta expresión para **74** en nuestra expresión para **37**, encontramos esta nueva expresión,

37 = **259** – 3 x (**333** – **259**) = - 3 x **333** + 4 x **259**

Si continuamos este proceso, obtenemos el siguiente desarrollo,

37 = - 3 x **333** + 4 x (**925** – 2 x **333**) = 4 x **925** – 11 x **333**

= 4 x **925** – 11 x (**2183** – 2 x **925**) = - 11 x **2183** + 26 x **925**

= - 11 x **2183** + 26 x (**3108** – **2183**) = 26 x **3108** – 37 x **2183**

= 26 x **3108** - 37 x (**5291** – **3108**) = - 37 x **5291** + 63 x **3108**

Así que, podemos deducir que ***m*** = 63 y ***n*** = - 37

C/ Recogidas Nº 45 - 6ºA 18005 Granada csifrevistad@gmail.com

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 12 – NOVIEMBRE DE 2008

3. ECUACIONES DIOFÁNTICAS

El término *Diofántico* referido a una ecuación hace referencia a ecuaciones para las que sólo buscamos soluciones en números enteros.

3.1. Ecuaciones diofánticas de dos incógnitas

Vamos a utilizar el Algoritmo de Euclides para resolver una **ecuación Diofántica** de dos incógnitas:

*Hallar dos números enteros **a** y **b** tales que*

99 a + 144 b = 9

Aplicamos el Algoritmo de Euclides para hallar el máximo común divisor de los dos números **99** y **144**

144 = 1 x **99**+ 45

99 = 2 x 45 + 9

45 = 5 x 9 + 0

Así encontramos que **m.c.d. (99, 144) = 9**

Reescribiendo estas ecuaciones en orden inverso encontramos lo siguiente,

9 = 99 – 2 x 45

= 99 – 2 x (144 – 99)

= 3 x **99** – 2 x **144**

Así obtenemos los siguientes valores para nuestras incógnitas ***a*** y ***b***:

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 12 – NOVIEMBRE DE 2008

a = 3 y ***b*** = -2

3.2. Ecuaciones diofánticas de tres incógnitas

Pero… ¿Cómo resolvemos una ecuación diofántica de 3 incógnitas? Pues aplicando el algoritmo de Euclides.

*Hallar dos números enteros **a** y **b** tales que*

99 a + 144 b + 176 c = 1

En el problema anterior hallamos el máximo común divisor de los números **99** y **144,**

Así, hemos obtenido el resultado,

m.c.d. (99, **144)** = **o9o**

Vamos a continuar el proceso hallando el máximo común divisor de los números **o9o** y **176**

176 = 19 x **o9o** + 5

o9o = 1 x 5 + 4

5 = 1 x 4 + 1

4 = 4 x 1

Así encontramos que **m.c.d. (o9o**, **176) = 1**

Reescribiendo las ecuaciones anteriores en orden inverso encontramos lo siguiente,

1 = 5 – 4

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 12 – NOVIEMBRE DE 2008

$= 5 - (9 - 5) = 2 \times 5 - 9$

$= 2 \times (176 - 19 \times 9) - 9$

$= 2 \times \mathbf{176} - 39 \times$ o**9**o

Así, hemos obtenido los siguientes resultados:

$1 = 2 \times \mathbf{176} - 39 \times$ o**9**o **y** o**9**o $= 3 \times \mathbf{99} - 2 \times \mathbf{144}$

Combinando estas dos ecuaciones encontramos lo siguiente,

$1 = 2 \times \mathbf{176} - 39 \times (3 \times \mathbf{99} - 2 \times \mathbf{144})$

$1 = -117 \times \mathbf{99} + 78 \times \mathbf{144} + 2 \times \mathbf{176}$

Por tanto obtenemos los siguientes valores para nuestras incógnitas ***a***, ***b*** y ***c***:

a = - 117, ***b*** = 78 y ***c*** = 2

3.4. Ecuaciones diofánticas de cuatro incógnitas

Hemos visto cómo utilizar el algoritmo de Euclides para resolver ecuaciones diofánticas de dos incógnitas y cómo ampliar el método para resolver ecuaciones de tres incógnitas.

Podemos seguir el mismo método para poder resolver ecuaciones diofánticas de cuatro o más incógnitas.

Como vemos resulta un algoritmo muy elegante y basado sólo en conceptos aritméticos relativamente sencillos que son comprensibles para la mayor parte de los alumnos y alumnas de Bachillerato.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 12 – NOVIEMBRE DE 2008

4. BIBLIOGRAFÍA

Apostol, T.M. (1976). *Introduction to analytic number theory*. New York: Springer.

Polya, G. (1990). *How to solve it.* Londres: Penguin Books Ltd.

Hardy, G. H. (1980) *An introduction to the theory of numbers.* Oxford: Oxford University Press

Oystein, O (1989) *Number theory and its history.* New York: Dover

Autoría

- Nombre y Apellidos: Ana Rovi García
- Provincia: Córdoba
- E-mail: rovi@alcavia.net