ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 13 – DICIEMBRE 2008

"SIGUIENDO LOS PASOS DE FIBONACCI"

AUTORÍA **ANA ROVI GARCÍA**
TEMÁTICA **MATEMÁTICAS. ARITMÉTICA. HISTORIA**
ETAPA **ESO. BACHILLERATO**

Resumen

En este artículo pretendemos dar una visión sobre la figura de Leonardo Pisano, haciendo un breve esbozo de su vida y comentando su obra. Para terminar nos centramos en un ejemplo del tipo de problemas matemáticos que resolvía Pisano.

Palabras clave

Liber abaci

Matemáticas en la Edad Media

Teoría de números

Leonardo Pisano

1. INTRODUCCIÓN

Es curioso cómo muchas veces los nombres nos llegan vacíos de significado y se nos hacen huecos, algo sin importancia.

Podemos pasar cientos de veces por el término "la serie de Fibonacci" o "los números Fibonacci" sin detenernos a reflexionar lo que significa realmente.

Quizá que "Fibonacci" hace referencia a un matemático… ¿Sería "Fibonacci" su apellido? … muchas veces, al estudiar matemáticas, nos detenemos demasiado en los detalles técnicos y nos olvidamos de la Historia y de que detrás de un teorema, de una fórmula hay una persona de carne y hueso que pensaba, escribía y hacía un enorme esfuerzo por transmitir sus ideas, por intentar decirnos algo sobre los números, las formas geométricas, etc.

REVISTA DIGITAL
INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 13 – DICIEMBRE 2008

2. CONTEXTO HISTÓRICO

Nuestro protagonista vivió en una época muy convulsa y apasionante, una época de grandes cambios en Europa: entre los siglos XII y XIII.

Era la época de las Cruzadas a Tierra Santa, de grandes conflictos políticos entre el Emperador Federico II de Alemania y el Papado. También fue la época del fervor religiosos de San Francisco de Asís.

Era una época de comercio y expansión económica, de crecimiento de la población y de auge de las ciudades, de tensiones políticas y religiosas, de viajes y encuentros con otras culturas especialmente las civilizaciones islámica y bizantina.

Al amparo de esto cambios, nace una nueva clase social – la burguesía – y con ella, un nuevo interés por la cultura, por el arte y la ciencia.

3. RESEÑA BIOGRÁFICA SOBRE LEONARDO PISANO

Leonardo de Pisa, también llamado Leonardo Pisano ha pasado a la Historia de las Matemáticas como el inventor de la serie de Fibonacci, surgida del estudio del crecimiento de las poblaciones de conejos y, no menos importante, por la introducción definitiva del sistema de numeración posicional en Europa.

Debe este apodo tan curioso al hecho su padre era llamado cariñosamente “Bonacci” por los habitantes de Pisa, que quiere decir “buena persona, tontorrón”

Así su hijo Leonardo, fue apodado “filius Bonacci” – de ahí “Fibonacci”

Ya aclarado el origen de su nombre, pasemos a comentar más detenidamente su biografía.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 13 – DICIEMBRE 2008

Leonardo nació en Pisa alrededor del año 1170, hijo de un comerciante que tenía sus posesiones en el norte de África en la ciudad argelina de Bejaia, cuidad en la que también fue cónsul durante un tiempo. Al estar su padre afincado en Argelia, Leonardo pasó gran parte de su infancia allí, donde tuvo contacto con el sistema de numeración árabe.

Leonardo quedó fascinado por el sistema árabe de numeración y por superioridad que les otorgaba en los cálculos, así que viajó por distintos países mediterráneos para estudiar con los grandes matemáticos árabes de la época su sistema de numeración más de cerca.

Así, en el año 1202, llega su primera gran obra: el *Liber Abaci*.

Este libro, dedicado a la teoría de números aplicado al comercio y la contabilidad, tuvo una repercusión enorme en la Europa medieval. A Leonardo le valió ser contratado como asesor por el Emperador Federico UU. Años más tarde, en 1240, la propia república de Pisa le otorga un salario permanente por su contribución al conocimiento.

Leonardo Pisano escribió más libros además de su *Liber Abaci*. Encontramos los siguientes:

- *Liber abaci* (1202)
- *Practica geometriae* (1220)
- *Flos* (1225)
- *Liber quadratorum.*

Cabría pensar que en una Europa medieval tan poco preocupada por problemas científicos, la obra de Fibonacci habría pasado desapercibida. Sin embargo, esto no fue así y Fibonacci gozó de gran prestigio durante su vida.

El prestigio de Fibonacci es debido en gran parte a que, a pesar de ser un matemático muy dado a la teoría y sistematización, Fibonacci supo explicar sus ideas de forma práctica y cercana a las personas que habían de utilizar sus métodos.

Leonardo daba consejos prácticos sobre cómo resolver problemas del comercio, sobre las compras, ventas, jornales, etc. Esto le convierte no sólo en un gran matemático sino en un gran educador y difusor de la cultura.

REVISTA DIGITAL INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 13 – DICIEMBRE 2008

4. CONTRIBUCIÓN DE LEONARDO PISANO A LAS MATEMÁTICAS

4.1. Liber abaci

Ya hemos comentado que el libro que recoge el saber matemático acumulado por Fibonacci en sus viajes está recogido en su *Liber abaci* publicado en Pisa en 1202.

Aun sin contar con la ayuda de la imprenta, el *Liber abaci* fue copiado y difundido por toda Europa y supuso la introducción del sistema de numeración posicional árabe y de las cifras en Europa.

Este libro está dividido en secciones.

La segunda sección recoge una gran colección de problemas relacionados con el mundo del comercio: cálculo de compras y ventas, conversión entre las distintas monedas europeas, cálculo de jornales, etc.

La tercera sección está dedicada a los números y en ella se recogen las investigaciones de Fibonacci sobre la cría de conejos, dando lugar a la importantísima seria de Fibonacci.

4.2. Practica geometriae

Otro de los libros escritos por Leonardo Pisano es el *Practica geometriae* que fue escrito alrededor de 1220. Este libro, como un título nos indica, está dedicado al estudio de la geometría.

Está dividido en ocho capítulos y contiene teoremas basados en los *Elementos* de Euclides.

Pero, como ya hiciera en su libro anterior – el Liber abaci – Leonardo Pisano sabe dar información práctica y concreta sobre cómo utilizar sus enseñanzas matemáticas en la vida diaria.

Así explica cómo calcular de altura de un edificio utilizando triángulos semejantes.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 13 – DICIEMBRE 2008

4.3. Flos

En este libro Fibonacci encuentra una aproximación bastante exacta a una raíz de la ecuación

$$10x + 2x^2 + x^3 = 20$$

Fibonacci demuestra que la solución de la ecuación no es ni un número entero, ni una fración, ni la raíz cuadrada de una fracción.

Una vez demostrado esto, Fibonacci continúa explicando que halla su solución mediante aproximación.

Sin explicar cómo, Fibonacci da una solución en notación sexagesimal 1.22.7.42.33.4.40, es decir, $1 + {}^{22}/_{60} + {}^{7}/_{60^2} + {}^{42}/_{60^3} + ...$

Esta solución se convierte al pasar de basa 60 a base 10 en 1.3688081075, una aproximación correcta con 9 decimales.

Este logro aritmético más que notable nos puede dar una visión más correcta acerca del gran conocimiento y astucia matemática de Fibonacci.

4.4. Liber quadratorum

El *Liber quadratorum* fue escrito en 1225 y constituye la obra más conseguida de Fibonacci, si bien no la más conocida.

El título del libro nos indica que está dedicado a los cuadrados y a la teoría de números que surge de ellos.

Fibonacci nos explica que los cuadrados pueden ser representados como la suma de dos números impares. Lo demuestra por inducción a partir de la fórmula $n^2 + (2n+1) = (n+1)^2$.

Fibonacci también demuestra resultados tales como:

- No existen x, y tales que $x^2 + y^2$ y $x^2 - y^2$ sean ambos cuadrados.
- *Para cualquier x, y,* $x^4 - y^4$ no puede ser un cuadrado.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 13 – DICIEMBRE 2008

5. EJEMPLO DE PROBLEMA PLANTEADO POR LEONARDO PISANO

A continuación planteamos un problema ideado por Leonardo de Pisa, descubridor de la serie Fibonacci, alrededor del año 1205.

Como vemos, Leonardo Pisano nos informa detalladamente del precio y tipos de pájaros que adquiere, pero se olvida decirnos cuántos compra de cada clase.

¿Seremos nosotros capaces de resolver ese misterio, 600 años después? ¿Necesitaremos todas las armas tecnológicas de nuestra época? ¿Un poco de ingenio? ¿Quizá ambas cosas?

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 13 – DICIEMBRE 2008

Veamos…

Vamos a denominar **x** al número de patitos, **y** al número de pollitos y **z** al número de palomas.

Sabemos que gasta 30 coronas y compra 30 pájaros así que podemos escribir dos ecuaciones.

Naturalmente, no compramos pájaros negativos ni fracciones de pájaro. Así que sabemos que estas ecuaciones son diofánticas (con soluciones en números enteros) y que tienen soluciones positivas.

Multiplicando la primera ecuación por 6 y la segunda por (- 2) reescribimos el sistema de ecuaciones de la siguiente forma

Combinando estas ecuaciones obtenemos la siguiente ecuación,

$$\mathbf{y} + 10\,\mathbf{z} = 120 \qquad (3)$$

¡Y ahora llega el momento de emplear un poco de ingenio!

Sabemos que la variable **y** puede tomar valores entre 1 y 28, al igual que las otras variables **x** y **z**.

Así que podemos comprobar por la ecuación anterior (3) que el máximo valor que puede tomar **z** es 11 – ya que si tomase el valor 12, la otra variable (**y**) se anularía.

De forma similar podemos observar que el mínimo valor que puede tomar **z** es 10.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 13 – DICIEMBRE 2008

Vamos a considerar los dos únicos valores posibles para **z** de forma independiente.

Sustituyendo este valor para **z** en la ecuación (3) hallamos el posible valor para la variable **y**.

Así, obtenemos los siguientes valores: **z** = 10, **y** = 10

Sustituyendo estos valores para **z** e **y** en la ecuación (2) vemos que la variable **x** se anula lo cual no es posible, ya que compra pájaros de los tres tipos.

Sustituyendo este valor para **z** en la ecuación (3) hallamos el posible valor para la variable **y**.

Así, obtenemos los siguientes valores: **z** = 11, **y** = 10

Sustituyendo estos valores para **z** e **y** en la ecuación (2) vemos que la variable **x** toma el valor **x** = 9.

Así, obtenemos la siguiente solución para el problema planteado por Leonardo de Pisa:

REVISTA INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS DIGITAL

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 13 – DICIEMBRE 2008

6. MÉTODO ORIGINAL DE RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA PLANTEADO

Sin embargo, en la época de Leonardo Pisano no existían ni incógnitas ni sistemas de ecuaciones… así que ¿Cómo lo resolvió él?

Hemos de tener en cuenta que en la Edad Media no se había implantado todavía la notación arábiga de cifras y los cálculos matemáticos se realizaban con ayuda de ábacos transcribiendo el resultado final en números romanos.

Sabemos que nuestro protagonista compra **30 pájaros** por **30 denari**, así que el cociente resulta ser 1denaro.

Así que nos encontramos lo siguiente:

Tenemos dinero de a **(1/3)**, dinero de **(1/2)** y dinero de a **2** y queremos conseguir dinero de a 1.

Y podemos agrupar de la siguiente forma:

- 5 pájaros por valor de 5 denari – **3 patitos** y **2 palomas**
- 3 pájaros por valor de 3 denari – **2 pollitos** y **1 paloma**

Asì que utilizando estos grupos podemos resolver de problema de la siguiente forma

- De los grupos de pájaros de a 5 denari compramos 3 y tenemos 9patitos y 6 palomas
- De los grupos de pájaros de a 3 denari compramos 5 y tenemos 10 pollitos y 5 palomas

En total vemos que por **30 denari** podemos comprar **9 patitos, 10 pollitos y 11 palomas**

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 13 – DICIEMBRE 2008

7. BIBLIOGRAFÍA

Sigler, L.E. (2003) *Fibonacci's Liber Abaci* New York: Springer

Polya, G. (1990). *How to solve it.* Londres: Penguin Books Ltd.

Hardy, G. H. (1980) *An introduction to the theory of numbers.* Oxford: Oxford University Press

Oystein, O. (1989) *Number theory and its history.* New York: Dover

Autoría

- Nombre y Apellidos: Ana Rovi García
- Provincia: Córdoba
- E-mail: rovi@alcavia.net