ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 14 – ENERO DE 2009

"ARITMÉTICA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS"

AUTORÍA
ANA ROVI GARCÍA

TEMÁTICA
MATEMÁTICAS

ETAPA
BACHILLERATO

Resumen

Este artículo pretende acercarnos al mundo de los números complejos.

Trataremos brevemente la historia de estos números para después pasar a explicar cómo funcionan aritméticamente.

Palabras clave

Números complejos

Aritmética de número complejos

1. INTRODUCCIÓN

Los orígenes del concepto de número se remontan a la prehistoria, es posible que incluso se aprendiese antes a contar que a escribir. Los números naturales y las fracciones ya eran usados por los Mesopotamios del segundo milenio antes de Cristo así como por los antiguos Egipcios.

Los números que surgieron de ideas geométricas como $\sqrt{2}$ también fueron objeto de interés ya en la antigua Grecia. Sin embargo una sólida definición de los números reales se hizo esperar hasta el siglo XIX con Cantor y Dedekind.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 14 – ENERO DE 2009

Los números negativos también fueron objeto de controversia durante siglos. Los matemáticos italianos del Renacimiento derivaron un método para resolver ecuaciones cúbicas, pero se dieron cuenta de que su método a veces producía soluciones con números que no existían dentro del sistema de números que ellos conocían.

Otro problema que se les planteó fue el de encontrar que algunas soluciones debían incluir expresiones como $\sqrt{-15}$. Y aquí es donde comienza nuestra historia.

2. MIRADA A LOS ORÍGENES

Vamos a comenzar dando una visión histórica del desarrollo de los números complejos y su utilización.

Muchos de los problemas matemáticos planteados desde la Antigüedad nos llevan a ecuaciones de segundo grado de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

siendo **a, b** y **c** números reales.

Sabemos que la solución para este tipo de ecuación (ecuación de 2º grado) viene dada por la fórmula,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Concretando un poco más, podemos deducir lo siguiente:

- la ecuación tiene dos soluciones reales distintas si $b^2 - 4ac > 0$
- la ecuación tiene una única solución (repetida) si $b^2 - 4ac = 0$
- la ecuación no tiene soluciones reales si $b^2 - 4ac < 0$

Vamos a considerar más de cerca el tercer caso presentado arriba.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 14 – ENERO DE 2009

Si $\mathbf{b^2 - 4ac < 0}$, nuestra ecuación de segundo grado no tiene soluciones reales ya que un número negativo no puede tener una raíz cuadrada real.

Esta cuestión ha sido considerada desde el punto de vista matemático desde hace ya varios siglos.

Ya en el siglo XVI, el matemático italiano Cardano empezó a experimentar con la aritmética de símbolos tales como $\sqrt{-1}$, empleando la aritmética habitual para números reales.

La expresión dada por $\sqrt{-1}$ es considerada la base de la aritmética de los números complejos y se representa con la letra *i.*

2.1. Ejemplo de problema planteado por Cardano

Sean dos números **x** e **y** tales que

$$x + y = 10$$
$$xy = 40$$

Utilizando la primera ecuación del sistema para expresando la variable **y** en función de la variable **x** y sustituyendo la expresión dada en la segunda ecuación del sistema obtenemos una ecuación de segundo grado que viene dada por la ecuación,

$$x^2 - 10x + 40 = 0$$

Las soluciones para el sistema de ecuaciones dado anteriormente se hallan resolviendo esta ecuación de segundo grado.

Es fácil observar que esta ecuación de segundo grado no tiene soluciones reales, así que podemos deducir que nuestro problema tampoco tiene soluciones reales.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 14 – ENERO DE 2009

Cardano nos explica que, sin embargo, tratando la expresión $\sqrt{-15}$ como un número real más, podemos escribir soluciones para la ecuación de segundo grado y su correspondiente sistema de ecuaciones de la siguiente forma:

$$x = 5 + \sqrt{-15}$$
$$y = 5 - \sqrt{-15}$$

Sin embargo, en el siglo XVI estas ideas sobre nuevos números no suscitaban mucho entusiasmo entre la comunidad científica y matemática.

A la larga, Cardano supo dar valor a sus ideas de una forma bastante inesperada… resolviendo la ecuación cúbica.

3. ARITMETICA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

3.1. Definición

Ya hemos hablado brevemente de los orígenes de los números complejos como expresiones para representar raíces de números negativos.

A continuación vamos a dar una definición más exacta de los números complejos como expresiones de la forma **z = a + bi** donde **i** es un símbolo con la propiedad $\mathbf{i^2 = -1}$ y **a** y **b** números reales.

Por otra parte, podemos expresar los números reales **a** y **b** en función del número complejo **z = a + bi** de la siguiente forma

$$a = \text{Re } z$$

$$b = \text{Im } z$$

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 14 – ENERO DE 2009

Así, podemos considerar los siguientes ejemplos:

- Sea el número complejo **z = 1 – 2i.**
  Podemos definir su parte real y su parte imaginaria de la siguiente forma,

  Re (1 – 2i) = 1
  Im (1 – 2i) = -2

  Vemos que la parte imaginaria de **z** no es **-2i** sino que resulta ser el coeficiente real de **i**.

- Sea el número complejo **z = 4i.**
  Podemos definir su parte real y su parte imaginaria de la siguiente forma,

  Re (4i) = 0
  Im (4i) = 4

  Vemos que la parte real de **z** es **0** y escribimos el número imaginario **z** sólo a partir de su parte imaginaria.

3.2. Adición

Ya explicamos, la hablar de los orígenes de los números complejos, que Cardano quería operar con ellos igual que con números reales.

Es decir, para las operaciones con números complejos utilizamos las mismas reglas aritméticas que para operar con números reales.

Así, para la adición utilizamos el mismo signo, **+** , y las mismas reglas.

Vamos a verlo más claramente con ejemplos

- Consideremos la suma de los números complejos $z_1 = 2 + i$ y $z_2 = 4 + 3i$
  Vemos que $\text{Re } z_1 = 2$ y $\text{Im } z_1 = 1$. Asimismo vemos que $\text{Re } z_2 = 4$ y $\text{Im } z_2 = 3$

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 14 – ENERO DE 2009

Así, encontramos que $z_1 + z_2 = (2 + i) + (4 + 3i) = 6 + 4i$

Vemos que sumamos las respectivas partes reales $Re\ z_1$ y $Re\ z_2$ para obtener $Re\ (z_1 + z_2)$

Asimismo sumamos las respectivas partes imaginarias $Im\ z_1$ y $Im\ z_2$ para obtener $Im\ (z_1 + z_2)$

Consideremos otro ejemplo:

- Sean los números complejos definidos por $z_1 = 2 + i$ y $z_2 = - 2 – i$
  Podemos hallar la suma $z_1 + z_2$ sumando partes reales y partes imaginarias, de la siguiente forma,

  $z_1 + z_2 = (2 + i) + (- 2 - i) = (2 - 2) + i\ (1 - 1) = 0 + 0\ i = 0$

3.3. Negativo

Vemos en el ejemplo anterior cómo la suma de dos números complejos daba como resultado cero.

Es decir, estos dos números complejos se anulan.

Esta observación nos lleva al concepto de contrapartida negativa de un número complejo dado.

Así podemos definir el negativo (**- z**) de un número complejo **z = a + bi** como

$$- z = - a - bi$$

Vamos a verlo más claramente con un ejemplo

- Consideremos el número complejo $z_1 = 2 + i$. Así su correspondiente número negativo viene dado por la siguiente expresión

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 14 – ENERO DE 2009

$-z_1 = -2 - i$

3.4. Sustracción

Los conceptos de suma de números complejos y de números complejos negativos nos lleva al concepto de sustracción o resta de números complejos.

Al igual que explicamos al hablar de la suma de números complejos, para la sustracción empleamos las mismas reglas que para operar con números reales.

Así, para la resta utilizamos el signo, **-** , y las mismas reglas.

Vamos a verlo más claramente con un ejemplo

- Consideremos la sustracción de los números complejos $z_1 = 2 + i$ y $z_2 = 4 + 3i$
  Vemos que $\text{Re } z_1 = 2$ y $\text{Im } z_1 = 1$. Asimismo vemos que $\text{Re } z_2 = 4$ y $\text{Im } z_2 = 3$

  Así, encontramos que $z_1 - z_2 = (2 + i) - (4 + 3i) = -2 - 2i$

Vemos que las respectivas partes reales $\text{Re } z_1$ y $\text{Re } z_2$ se restan para obtener $\text{Re}\,(z_1 - z_2)$

Asimismo restando las respectivas partes imaginarias $\text{Im } z_1$ y $\text{Im } z_2$ obtenemos $\text{Im}\,(z_1 - z_2)$

3.5. Multiplicación

Ya que estamos más familiarizados con las operaciones con números complejos, vamos a considerar la multiplicación.

Consideramos dos números complejos dados por $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ siendo a, b, c y d reales.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 14 – ENERO DE 2009

Así, el producto de ambos números complejos viene dado por la expresión:

$$z_1 z_2 = (a+bi)(c+di) = ac+adi+bci+bd(i^2) = (ac-bd)+(ad+bc)i$$

Vemos que al multiplicar ambos números tenemos que reorganizar las partes real e imaginaria resultantes.

Veamos un ejemplo:

- Consideremos la multiplicación de los números complejos $z_1 = 2 + i$ y $z_2 = 4 + 3i$
  Así, encontramos que $z_1 z_2 = (2 + i)(4 + 3i)$

  $= 2 \times 4 + 2 \times 3i + 4 \times i + i \times 3i$

  $= (8 - 3) + (6i + 4i)$

  $= 5 + 10\,i$

3.6. Recíproco

El recíproco **(1/z)** de un número complejo **z = a + bi** viene dado por la expresión:

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 14 – ENERO DE 2009

$$\frac{1}{z} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

Vemos que este concepto está algo más alejado de nuestra aritmética tradicional en números reales.

El concepto de recíproco de un número complejo nos va a hacer posible la división de números complejos como multiplicación de un número por el recíproco del otro.

Pero primero vamos a considerar algunos ejemplos en los que calculamos el recíproco de un determinado número complejo.

- Sea un número complejo dado por **z = 1 + i,** podemos calcular su recíproco mediante la siguiente expresión

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{1^2+1^2} = \frac{1-i}{2}$$

Vemos que el coeficiente i viene dado por 1. Así el denominador en la expresión anterior resulta ser $1^2 + 1^2$.

3.7. Cociente

Ya que sabemos cómo calcular el recíproco de un número complejo, estamos en condiciones de poder calcular el cociente de dos números complejos dados, es decir, el producto de un número complejo con el recíproco de otro.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 14 – ENERO DE 2009

Veamos este proceso más de cerca.

Queremos hallar el cociente de los números complejos dados por

$$z_1 = a + bi$$
$$z_2 = c + di$$

Así, podemos escribir la siguiente expresión

$$\frac{z_2}{z_1} = z_2\left(\frac{1}{z_1}\right) = (c+di)\left(\frac{a-bi}{a^2+b^2}\right) = \frac{(c+di)(a-bi)}{a^2+b^2} = \frac{(ac+bd)+(ad-bc)i}{a^2+b^2}$$

Consideremos un ejemplo:

- Vamos a hallar el cociente de los números complejos dados por $z_1 = 2 + i$ y $z_2 = 4 + 3i$

$$\frac{4+3i}{2+i} = (4+3i)\left(\frac{1}{2+i}\right) = (4+3i)\left(\frac{2-i}{2^2+1^2}\right) = \frac{(4+3i)(2-i)}{5} = \frac{11+2i}{5}$$

3.8. Conjugado

Por último vamos a considerar el conjugado de un número complejo.

Así podemos definir el conjugado $\bar{z}$ de un número complejo dado por **z = a + bi** como

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 14 – ENERO DE 2009

$$\bar{z} = a - bi$$

A partir de esta definición vamos a considerar algunas de las propiedades del conjugado de un número complejo:

- $z + \bar{z} = 2\,Re\,z$
- $z - \bar{z} = 2iImz$
- $\overline{(\bar{z})} = z$

Quizá una de las propiedades más interesantes del conjugado de un número complejo sea que el producto de un número complejo dado por su conjugado resulta ser siempre un número real.

Así, para el número complejo dado por **z = a + bi** obtenemos la siguiente expresión,

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

4. BIBLIOGRAFÍA

Ahlfors, L. (1966). *Complex Analysis*. New York: McGraw-Hill

Polya, G. (1990). *How to solve it.* Londres: Penguin Books Ltd.

Hardy, G. H. (1980) *An introduction to the theory of numbers.* Oxford: Oxford University Press

Oystein, O (1989) *Number theory and its history.* New York: Dover

Autoría

- Nombre y Apellidos: Ana Rovi García
- Centro, localidad, provincia: Córdoba
- E-mail: rovi@alcavia.net

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 14 – ENERO DE 2009