ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 14 – ENERO DE 2009

"UN VIAJE POR EL MUNDO DE LA PROBABILIDAD"

AUTORÍA **JUAN JOSÉ LEÓN ROMERA**
TEMÁTICA **PROBABILIDAD**
ETAPA **BACHILLERATO**

Resumen

En el presente artículo se tratan los contenidos relacionados con Probabilidad. Se hace un acercamiento, con relativamente profundidad, al mundo de este amplio concepto integrado dentro de las Matemáticas, llegando a desarrollarse algunos teoremas matemáticos con sus correspondientes demostraciones. Además, el desarrollo de esta temática se acompaña de ejemplos que clarifican los contenidos a enseñar en relación a Probabilidad.

Palabras clave

- Experimento aleatorio.
- Suceso.
- Probabilidad.

1. EXPERIMENTO ALEATORIO. ESPACIO MUESTRAL ASOCIADO:

<u>Definición</u>:

Un fenómeno o experiencia se dice aleatorio cuando al repetirlo en condiciones análogas no se puede predecir el resultado.

Si por el contrario, se puede predecir el resultado de una experiencia aún antes de realizarla, se dice que el experimento es determinista.

Son fenómenos aleatorios:

- Extracción de una carta de la baraja.
- Lanzamiento de un dado.
- Respuestas a una encuesta.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 14 – ENERO DE 2009

Definición:

El conjunto de todos los posibles resultados de un experimento se llama espacio muestral, y se representa por E o bien por Ω.

Ejemplo:

El espacio muestral del experimento que consiste en lanzar una moneda al aire tres veces es:

E = {(c,c,c),(c,c,x),(c,x,c),(x,c,c),(x,x,c),(x,c,x),(c,x,x),(x,x,x)}

Cada elemento del espacio muestral E se llama suceso elemental o punto muestral.

1.1. Sucesos. Suceso imposible o nulo. Suceso contrario:

Definición:

Sea E el espacio muestral de un experimento aleatorio. Se llama suceso a todo subconjunto del espacio muestral E. Un suceso puede determinarse por extensión (enumerando los elementos) o dando una propiedad que se verifica por, y sólo por, los elementos de dicho subconjunto.

Diremos que un suceso A se verifica cuando al realizar el experimento se obtiene como resultado uno de los puntos muestrales de A.

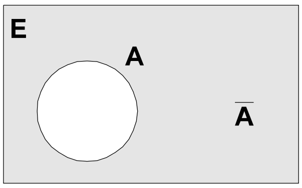
El conjunto formado por todos los sucesos del espacio muestral se llama espacio de sucesos (S). Es decir, el espacio de sucesos está formado por todos los subconjuntos del espacio muestral.

Si la experiencia aleatoria es, por ejemplo, lanzar una moneda:

E= {c,x} y el espacio de sucesos S= {ϕ,{c},{x},{c,x}}

Los sucesos definidos por los conjuntos ϕ y E se llaman suceso imposible y suceso seguro respectivamente. El suceso imposible es aquel que nunca se realiza, y el suceso seguro es el que se realiza siempre.

Dado un suceso A, se llama suceso contrario o complementario de A, y se representa por $\bar{A}$, al suceso que se realiza cuando no se realiza A y recíprocamente.

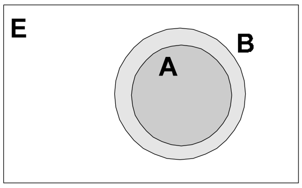


El suceso contrario de E es ϕ y recíprocamente.

INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS
REVISTA DIGITAL

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 14 – ENERO DE 2009

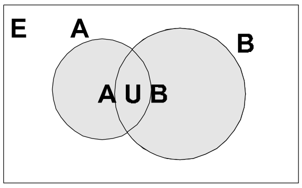
Un suceso A se dice que está contenido o inducido en otro B si siempre que se verifica A se verifica B. Se representa $A \subset B$.



1.2. Operaciones con sucesos:

Unión de sucesos.

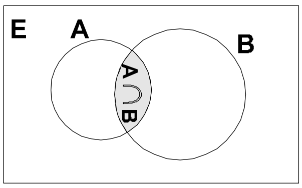
Dados dos sucesos A y B se llama unión de A y B, y se representa por $A \cup B$, al suceso que se realiza cuando se realiza alguno de ellos, A o B.



Intersección de sucesos.

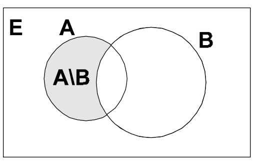
Dados dos sucesos A y B, se llama suceso intersección de A y B, y se representa por $A \cap B$, al suceso que se realiza si y sólo si se realizan simultáneamente A y B.

Dos sucesos A y B cuya intersección es el suceso imposible se llaman sucesos incompatibles. Obsérvese que un suceso y su contrario son siempre incompatibles.



Diferencia de sucesos.

Dados dos sucesos A y B, se llama suceso diferencia de A y B, y se representa por A\B, al suceso $A \cap \overline{B}$. O sea, A\B está formado por todos los puntos muestrales de A que no están en B.



ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 14 – ENERO DE 2009

Propiedades de la unión e intersección de sucesos.

	UNIÓN	INTERSECCIÓN
Asociativa	(A∪B)∪C=A∪(B∪C)	(A∩B)∩C=A∩(B∩C)
Conmutativa	A∪B=B∪A	A∩B=B∩A
Idempotente	A∪A=A	A∩A=A
Simplificativa	A∪(B∩A)=A A∩(B∪A)=A	
Distributiva	A∪ (B∩C)=(A∪B)∩(A∪C) A∩(B∪C)=(A∩B) ∪ (A∩C)	
Además:	$A\cup\overline{A}$=E	$A\cap\overline{A}$=ϕ

Consecuencias:

i) A∪ϕ=A , A∩ϕ=ϕ
ii) A∩E=A, A∪E=E
iii) Leyes de De Morgan: $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$, $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

2. PROBABILIDAD:

2.1. Frecuencia absoluta y relativa de un suceso.

Se llama frecuencia absoluta de un suceso A al número de veces que se verifica A al realizar el experimento un número determinado de veces.

Se llama frecuencia relativa de un suceso A al cociente entre su frecuencia absoluta y el número de veces que se realiza el experimento.

$$\mathbf{f_r(A)}=\frac{\mathbf{f_a(A)}}{\mathbf{n}}$$ siendo n el número de veces que se repite el experimento.

INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS
REVISTA DIGITAL

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 14 – ENERO DE 2009

2.1.1. Propiedades.

a) $0 \leq f_r(A) \leq 1$

b) $f_r(E) = 1$

c) Si $A \cap B = \phi$, entonces $f_r(A \cup B) = f_r(A) + f_r(B)$

2.2. Ley de los grandes números.

La frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse hacia un número a medida que el número de pruebas del experimento aleatorio crece indefinidamente. A este hecho se le conoce como ley de los grandes números.

Este número al que la frecuencia relativa se acerca a medida que es mayor el número de pruebas realizadas, lo llamaremos probabilidad del suceso.

2.3. Definición axiomática de probabilidad.

Sea E el espacio muestral de un experimento aleatorio. Una probabilidad en E es cualquier función P que asigna a cada suceso A un número real P(A) que cumple las siguientes propiedades:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(E) = 1$
3. Si A y B son incompatibles ($A \cap B = \phi$), entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Estas tres condiciones reciben el nombre de axiomas de probabilidad.

2.4. Propiedades de la probabilidad.

1. $P(\phi) = 0$

Demostración: Sea $A \in S$. Sabemos que $A \cup \phi = A$ y $A \cap \phi = \phi$. Entonces por el axioma 3:

$$P(A) = P(A \cup \phi) = P(A) + P(\phi) \Rightarrow P(\phi) = 0$$

2- $P(A) = 1 - P(\overline{A})$, $\forall A \in S$

Demostración: Sea $A \in S$. Sabemos que $A \cup \overline{A} = E$ y $A \cap \overline{A} = \phi$. Entonces por l axioma 3:

$$P(E) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}),$$

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 14 – ENERO DE 2009

Además, por el axioma 2: P(E)=1.

Entonces: $1=P(A)+P(\overline{A}) \Rightarrow P(A)=1-P(A)$

3- Si A y B son sucesos tales que $A\subset B$, entonces $P(A)\leq P(B)$

<u>Demostración</u>: Sean A, $B\in P(E)$ tal que $A\subset B$, entonces existe un

$C\in S$ tal que $A\cup C=B$ y $A\cap C=\phi$, por el axioma 3:

$P(B)=P(A)+P(C)$

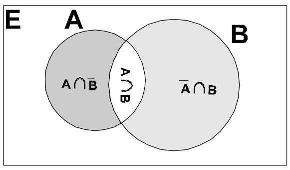
Como $P(C)\geq 0$, por el axioma 1, entonces:

$P(A)\leq P(B)$

4- Si A y B son dos sucesos no necesariamente incompatibles, entonces :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

<u>Demostración:</u>



$P(A\cup B)=P(A\cap B)+P(\overline{B}\cap A)+P(\overline{A}\cap B)$

$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap \overline{B})$

$P(B)=P(B\cap A)+P(\overline{A}\cap B)$

Restando de la primera igualdad las dos últimas:

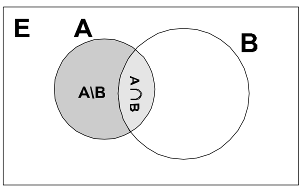
$P(A\cup B)-P(A)-P(B)=-P(A\cap B) \Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

Generalizando esta propiedad, obtenemos:

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$

5.- $P(A\backslash B)=P(A)-P(A\cap B)$

<u>Demostración</u>: $P(A)=P((A\backslash B)\cup(A\cap B))=P(A\backslash B)+P(A\cap B)$



ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 14 – ENERO DE 2009

2.5. Enunciado de la Regla de Laplace.

Si los resultados de una experiencia aleatoria son casos equiprobables, la probabilidad de un suceso A es:

$$P(A) = \frac{\text{n}^{\text{o}}\ \text{de casos favorables}}{\text{n}^{\text{o}}\ \text{de casos posibles}}$$

3. PROBABILIDAD CONDICIONADA. SUCESOS INDEPENDIENTES:

3.1. Definición de probabilidad condicionada.

Para introducirnos en este concepto, veamos primero el siguiente ejemplo**:**

Los resultados de una encuesta sobre la actitud política de 334 personas es el siguiente:

	VARONES	MUJERES	TOTAL
DERECHAS	145	42	187
IZQUIERDAS	51	96	147
TOTAL	196	138	334

Sea A: "ser varón" y B: "ser de derechas".

Se elige una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que se a de derechas sabiendo que es varón? Evidentemente la probabilidad pedida es: $\frac{145}{196}$ pues hay 196 varones de los cuales 145 son de derechas.

Esta probabilidad es la que llamaremos Probabilidad condicionada del suceso B respecto al suceso A. Dicho de otro modo, la probabilidad condicionada de un suceso B respecto de otro A es la probabilidad del suceso B sabiendo que previamente ha ocurrido el suceso A.

Definición:

Se llama Probabilidad condicionada del suceso B respecto del suceso A, y la denotaremos por P(B/A), al cociente :

$$P(B/A)=\frac{\mathbf{P(A \cap B)}}{\mathbf{P(A)}} \quad \text{si } P(A) \neq O$$

Análogamente podemos definir **P(A/B)**.

De lo anterior se deducen claramente las relaciones siguientes:

$$\mathbf{P(A \cap B)=P(A) \cdot P(B/A)} \qquad \mathbf{P(A \cap B)=P(B) \cdot P(A/B)}$$

Ejemplo:

De una urna que contiene 9 bolas rojas y 5 negras, se extraen sucesivamente 2 bolas. Calcular la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) Que las dos sean negras.

b) Que las dos sean rojas.

c) Que la primera se roja y la segunda negra.

d) Que la segunda se roja sabiendo que la primera fue negra.

Solución:

a) Sean N_1: sacar la 1ª Negra

N_2: sacar la 2ª Negra

Tenemos: $P(N_1 \cap N_2) = P(N_1) \cdot P(N_2/N_1) = 5/14 \cdot 4/13$

b) Sean R1: sacar la 1ª Roja

R_2: sacar la 2ª Roja

Tenemos: $P(R_1 \cap R_2) = P(R1) \cdot P(R_2/R_1) = 9/14 \cdot 8/13$

c) Sean R_1: Sacar la 1ª Roja

N_2: Sacar la 2ª Negra

Tenemos: $P(R_1 \cap N_2) = P(R_1) \cdot P(N_2/R_1) = 9/14 \cdot 5/13$

d) Sean N_1: La 1ª es Negra

R_2: La 2ª es Roja

Tenemos: $P(R_2/N_1) = 9/13$ (quedan 13 bolas de las cuales 9 son rojas)

3.2. Concepto de sucesos independientes.

Definición:

Dos sucesos A y B se dicen independientes si $P(B) = P(B/A)$.

Ejemplo:

Consideremos el experimento de extraer cartas de una baraja ¿Cuál es la probabilidad de extraer dos reyes?

a) Sin devolver la 1ª carta.

b) Con devolución.

INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS
REVISTA DIGITAL

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 14 – ENERO DE 2009

Solución:

a) Sean R_1: "conseguir rey en la 1ª extracción"

R_2: "conseguir rey en la 2ª extracción"

Tenemos: $P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \cdot P(R_2/R_1) = 4/40 \cdot 3/39$

b) Por independencia (al no influir la 1ª bola en la 2º): $P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \cdot P(R_2) = 4/40 \cdot 4/40$

3.3. Cálculo de probabilidades condicionadas y de intersección de sucesos.

De la combinación de la fórmula de la probabilidad condicionada y de la definición de sucesos independientes se puede deducir que si dos sucesos A y B son independientes entonces:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Esta fórmula se extiende para el caso de n sucesos independientes A_1, A_2,.., A_n quedando:

$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$.

Como hemos visto, en el caso de sucesos dependientes teníamos la expresión: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$ que en el caso de tres sucesos sería :

$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/A \cap B)$ pudiendo generalizar también esta fórmula para el caso de n sucesos.

Definición:

Se dice que un conjunto de sucesos A_1, A_2,...,A_n forman un sistema completo de sucesos para un determinado experimento aleatorio si verifican las dos condiciones siguientes :

a) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = E$

b) A_1, A_2,...,A_n son incompatibles 2 a 2 ($A_i \cap A_j = \phi$).

3.3.1. Teorema de la Probabilidad Total.

Sean A_1,A_2,...,A_n un sistema completo de sucesos tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero, y sea B un suceso para el que se conocen las probabilidades $P(B/A_i)$, entonces la probabilidad del suceso B viene dada por: $\mathbf{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B/A_i)}$

Demostración:

Como $B = B \cap E = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)$, entonces se cumple que: $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B/A_i)$

INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS
REVISTA DIGITAL

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 14 – ENERO DE 2009

3.3.2. Teorema de Bayes.

Sea $A_1, A_2, ..., A_n$ un sistema completo de sucesos tal que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero, y sea B un suceso cualquiera para el que se conocen las probabilidades $P(B/A_i)$, entonces:

$$\mathbf{P(A_i / B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B / A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B / A_i)}, i = 1, 2, ..., n}$$

Demostración:

Tenemos: $P(A_i \cap B) = P(A_i) \cdot P(B/A_i) = P(B) \cdot P(A_i/B)$, i=1,...,n. Despejando $P(A_i/B)$ nos queda:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(B)}, i = 1, ..., n$$

y por el teorema de la probabilidad total: $P(A_i/B) = \dfrac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B/A_i)}, i = 1, ..., n$

3.3.3. Ejemplo.

Se tienen dos urnas. Una urna A que tiene 3 bolas blancas y 2 negras, y otra urna B con 2 bolas blancas y 3 negras. Se elige una urna al azar y de ella se extrae una bola.

a) Calcular la probabilidad de que la bola extraída sea negra.

b) Si sabemos que la bola extraída es negra, ¿qué probabilidad hay de que fuese de la urna A?

La resolución de este problema tipo es al siguiente:

Sean A: "elegir la urna A"

B: "elegir la urna B"

C: "extraer bola negra"

a) Por el Teorema de la Probabilidad Total:

P(N) = P(A) · P(N/A) + P(B) · P(N/B) = 1/2 · 3/5 + 1/2 · 2/5 = 1/2

b) Por el Teorema de Bayes:

$$P(A/N) = \frac{P(A) \cdot P(N/A)}{P(A) \cdot P(N/A) + P(B) \cdot P(N/B)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}} = \frac{3}{5}$$

REVISTA DIGITAL INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 14 – ENERO DE 2009

4. BIBLIOGRAFÍA.

- Asencio, M. J., Romero, J.A. y De Vicente, E. (1999). *Estadística.* Madrid: McGraw-Hill.
- Colera, J., Oliveira, M.J., García, R. y Santaella, E. (2008). *Matemáticas I.* Madrid: Anaya.
- Sánchez, R. (2004). *Estadística.* Granada: Rafael Sánchez.

Autoría

- Nombre y Apellidos: Juan José León Romera
- Centro, localidad, provincia: IES Séneca, Córdoba
- E-mail: jjleon1979@hotmail.com