

"GEOMETRÍA Y NUEVAS TECNOLOGÍAS"

AUTORÍA Mª DEL PILAR GUERRA CÁRDENAS
TEMÁTICA GEOMETRÍA X NUEVAS TECNOLOGÍAS
ETAPA
ESO

Resumen

El concepto de lugar geométrico es uno de los más difíciles de asimilar para los alumnos de Enseñanza Secundaria Obligatoria a pesar de estar presente en muchos elementos geométricos que se tratan habitualmente. En este artículo propondremos la utilización de programas informáticos como recurso para conseguir que nuestros alumnos se familiaricen con este concepto de una forma visual y manipulativa.

Palabras clave

Lugar geométrico.

Mediatriz.

Bisectriz.

Circunferencia.

Circuncentro.

Baricentro.

Ortocentro.

Incentro.

1. EL CONCEPTO DE LUGAR GEOMÉTRICO.

Podemos definir el lugar geométrico como el conjunto de puntos que cumplen una determinada propiedad.

Cuando decimos que un lugar geométrico está definido por una propiedad se cumple por una parte que los puntos del lugar geométrico cumplen la propiedad y, por otra, que todo punto que posee la propiedad pertenece al lugar geométrico.



De aquí podemos deducir que los puntos que no cumplen la propiedad no pertenecen al lugar geométrico.

Podemos poner ejemplos muy variados pero comenzaremos con los más conocidos y sencillos:

Mediatriz: es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los dos extremos de un segmento.

En la figura tenemos la mediatriz del segmento AB. Resulta ser la perpendicular al segmento AB que pasa por su punto medio.



De esta forma se cumple que todos los puntos de la mediatriz equidistan de A y B y que todo punto que esté a la misma distancia de A y B está por fuerza en su mediatriz.

Bisectriz: es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los dos lados de un ángulo. Al dibujarla la bisectriz divide a un ángulo en dos partes iguales.



La figura nos muestra la bisectriz del ángulo formado por las rectas r y s. Las dos líneas en rojo marcan la distancia del punto A a las dos rectas.

Al igual que en la mediatriz todos los puntos de la bisectriz cumplen la misma propiedad y todos los puntos que equidisten de las dos rectas están en la bisectriz.

Circunferencia: es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de otro punto llamado centro.





En la figura los puntos A y B equidistan del punto C o centro de la circunferencia. Cualquier punto que deba encontrarse a la misma distancia de C que los puntos A y B estará sobre la circunferencia dibujada.

1.1. Relación con el dibujo técnico.

El concepto de lugar geométrico está tan ligado a las matemáticas como al dibujo técnico. De hecho en muchas ocasiones, cuando el profesor de matemáticas explica algunos ejemplos de lugares geométricos, los alumnos señalan conocerlos pues los han estudiado en la clase de dibujo. Podemos hablar en este caso de la mediatriz de un segmento o la bisectriz de un ángulo.

Esta situación provoca cierta perplejidad en los alumnos, pues les estamos presentando elementos que ya resultaban conocidos para ellos y no parecían entrañar mucho misterio, desde una óptica distinta. Hemos cambiado las sencillas mediatriz y bisectriz por una definición un tanto compleja cuya sola lectura ya resulta complicada para un alumno de secundaria.

Nuestros alumnos han aprendido a trazar la mediatriz de un segmento y la bisectriz de un ángulo utilizando material de dibujo como escuadra, cartabón y compás pero cuando trabajamos en clase de matemáticas nos centramos más en lo que es el concepto dejando un poco de lado su representación. Esto hace que algunos lugares geométricos los trabajemos de forma muy teórica, sin que los alumnos construyan o dibujen ejemplos variados. Desde luego podemos justificar este sistema teórico de trabajo pues sería muy costoso de tiempo que en clase de matemáticas se dibujase una batería de ejemplos.

Teniendo en cuenta que, por su desarrollo intelectual, los alumnos de secundaria necesitan todavía apoyarse en elementos visuales para poder realizar una comprensión más completa de los conceptos, nos encontramos con cierta dificultad al no poder practicar suficientemente con ejemplos gráficos creados por los mismos alumnos.

2. USO DE LAS NUEVAS TECNOLOGÍAS EN LA GEOMETRÍA. GEOGEBRA.

Para solventar este problema tenemos al alcance algunos recursos que permiten trabajar y manipular elementos geométricos. Uno de estos recursos son los programas informáticos y dentro de ellos vamos a centrarnos en el Geogebra.

Geogebra es un software libre que reúne Geometría, Álgebra y Análisis y puede descargarse desde la página <u>http://www.geogebra.org/cms/index.php?option=com_frontpage&Itemid=1</u>.

Nos interesa utilizar la potencia de este programa informático para representar figuras con precisión y rapidez. El programa, como veremos en los siguientes apartados, resulta muy intuitivo y cómodo de manejar para los alumnos.



2.1. Comenzando en Geogebra.

Una vez que tenemos el programa descargado e instalado en nuestro ordenador pinchamos en el icono que aparece en el escritorio y directamente accedemos a la pantalla siguiente:



Podemos ver que en esta pantalla se nos ofrecen distintas opciones de dibujo. Tenemos una barra de herramientas con iconos desplegables que nos dan diversas opciones para dibujar si pinchamos sobre la pequeña flecha situada en la esquina inferior derecha del icono.





En la barra y a la derecha de los iconos aparece escrito en negrita el nombre del icono que hemos marcado y debajo, ya en letra normal, nos dice qué datos o elementos debemos dar al programa para que realice el dibujo deseado.

Por ejemplo, si queremos dibujar el segmento entre dos puntos seleccionamos el tercer icono desde la izquierda y desplegamos todas sus opciones. Marcamos la segunda de ellas "Segmento entre dos puntos". Una vez hecha esta selección vamos a la pantalla del programa y pinchamos con el ratón sobre los dos puntos que queramos del plano. Automáticamente el programa traza el segmento que los une.



En la imagen correspondiente a la pantalla del programa observamos los distintos iconos que nos ofrece.

A continuación vamos a detallar brevemente la utilidad de cada uno de éstos iconos. Comenzamos de izquierda a derecha:

- El primero de ellos nos ofrece la posibilidad de desplazar el gráfico o de hacerlo rotar en torno a un punto dado.

- El segundo icono nos permite marcar puntos, intersecciones de objetos y marcar el punto medio.

- El siguiente es útil para dibujar rectas, segmentos o vectores. Tiene opciones según queramos dar como datos los extremos o bien un extremo y la longitud.

- El cuarto icono nos asiste para trazar paralelas, perpendiculares, mediatrices, bisectrices, tangentes, rectas polares o lugares geométricos.



- Con el quinto icono dibujamos polígonos.

- Con el sexto circunferencias, semicircunferencias, arcos y cónicas.
- El siguiente nos permite incluir ángulos, distancias, áreas y pendientes.
- El octavo podemos usarlo para reflejar objetos, rotar, trasladar o dilatar.

- El noveno icono nos da la opción de insertar textos en el gráfico, insertar imágenes y relacionar objetos.

- El último nos ofrece desplazar el gráfico, zoom, mostrar/ocultar objetos o textos y eliminar objetos.

Podemos **guardar** los archivos que hagamos en cualquier carpeta. Se guardarán como tipo .ggb. También podremos **imprimir** los gráficos que obtengamos. Antes de hacerlo podemos ver el resultado en "Archivo" y una vez dentro "Previsualiza impresión".

Resulta muy útil la opción "Exportar" dentro del menú "Archivo". Con ella podremos llevarnos el trabajo realizado en geogebra a otros programas. Por ejemplo si seleccionamos "Exporta" y "Copia zona gráfica al portapapeles" tendremos nuestro gráfico disponible para pegarlo en otro programa. Si quisiéramos pegarlo en Word sólo tendríamos que, después de seleccionar exportar y copia de zona gráfica al portapapeles, irnos a la pantalla de Word y seleccionar "Pegar".





En la imagen anterior se puede observar el resultado de pegar el gráfico obtenido con geogebra en un documento de Word. En él podemos ver un triángulo, una circunferencia y las tangentes a la circunferencia trazadas desde uno de los vértices de triángulo.

2.2. Utilización de Geogebra para el estudio de lugares geométricos.

Vamos ahora a centrarnos en la utilización del programa para trabajar con los lugares geométricos que antes se comentaban.

Comenzaremos con la **mediatriz** de un segmento.

Para dibujar en geogebra la mediatriz de un segmento empezaremos por dibujar el segmento. Para ello es conveniente seleccionar la opción "Segmento entre dos puntos" que aparece en el tercero de los iconos de la barra de herramientas. Una vez tenemos el segmento con sus extremos, A y B, seleccionamos la opción "Mediatriz" dentro del cuarto icono. Para trazar la mediatriz el programa nos pide que seleccionemos el segmento deseado. Situamos el ratón sobre la línea del segmento, que se resaltará al coincidir el ratón con ella, y pinchamos. Al hacer esto aparecerá la mediatriz del segmento.

Sería conveniente dar un **color distinto** a la mediatriz para diferenciarla mejor. Para ellos situamos el ratón sobre la mediatriz y pinchamos con el botón derecho. Se abrirá un menú en el que deberemos seleccionar "propiedades". Dentro de "propiedades" la pestaña "color" nos dará a elegir el color que deseamos para el objeto en cuestión. En este caso damos a la mediatriz un tono rojo.

Una de las ventajas de trabajar con Geogebra es la rapidez con la que se pueden hacer algunas comprobaciones. Como decíamos al principio la mediatriz es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos de un segmento. Vamos a comprobar que los puntos de nuestra mediatriz cumplen esta propiedad.

Seleccionamos en el segundo icono "Nuevo punto" y pinchamos sobre la mediatriz marcándose así el punto C. En el icono séptimo seleccionamos la opción "distancia" y pinchamos sobre el punto C y el extremo del segmento A. Aparecerá en la pantalla la medida del segmento CA. Si repetimos la misma operación con el extremo B aparecerá la medida del segmento CB y veremos que coincide con la del segmento anterior. Podemos repetir la operación tantas veces como queramos pues no conlleva un tiempo excesivo hacer este proceso.

Así los alumnos podrán dibujar la mediatriz y comprobar, con tantos ejemplos como cada uno necesite, que todos los puntos sobre ella cumplen la propiedad enunciada.

Este tipo de trabajos nos permite adaptarnos a los distintos ritmos de trabajo de los alumnos. Algunos realizarán un único ejemplo y quedarán satisfechos y otros necesitarán repetir el proceso más veces para convencerse.





En esta imagen tenemos la mediatriz, en color rojo, de un segmento y además se han calculado las distancias de los puntos C y D a los extremos de dicho segmento. Estas distancias aparecen sobre el gráfico y también en la pantalla de la izquierda.

Un recursos importante de Geogebra es la posibilidad de modificar el gráfico simplemente moviendo uno de los puntos. Si seleccionamos la opción "Desplazar" en el primer icono, podemos coger el punto A, por ejemplo, y moverlo. Al hacerlo todo el gráfico se adaptará a los cambios, se moverá la mediatriz y cambiarán las distancias de los puntos seleccionados a los extremos del segmento. De esta forma el alumno puede ver cómo la mediatriz de cada segmento sigue cumpliendo la propiedad indicada al principio.

Vamos a desarrollar a continuación el segundo ejemplo de lugar geométrico, la bisectriz.

En este caso comenzaremos dibujando dos rectas secantes. Seguidamente elegimos la opción "bisectriz" en el cuarto icono. Para hacer la bisectriz podemos dar dos rectas o tres puntos. En este caso marcaremos las dos rectas dibujadas anteriormente.

Tendremos así las bisectrices de los cuatro ángulos que se forman entre dos rectas. En la imagen aparecen dibujadas en colores rojo y azul.





También podemos optar por dar tres puntos y luego hacer la bisectriz de los puntos dados. Al hacer la bisectriz tendremos que dar los tres puntos y el programa considerará que el punto dado en segundo lugar correspondería al vértice del ángulo al que le hacemos la bisectriz. En la imagen siguiente hemos trazado la bisectriz de los puntos A, B y C dados en ese orden. De esta forma el programa toma el punto B como vértice del ángulo.





Igualmente resulta fácil y rápido calcular las distancias de los puntos de la bisectriz a las dos rectas que forman el ángulo. Basta con crear un punto sobre la bisectriz y calcular la distancia de ese punto a las dos rectas dadas de forma similar a como se hizo para la mediatriz. Lo podemos ver en la imagen que sigue. Aparecen las dos bisectrices de los cuatro ángulos que forman las dos rectas. Se ha marcado en rojo aquella en la que nos vamos a fijar. Podemos comprobar que los puntos D y E equidistan de las rectas a y b.



Análogamente al caso de la mediatriz, también ahora podemos seleccionar en el primer icono "Desplazar" y pinchar sobre el punto A de la imagen anterior. Así conseguiremos mover el punto A y con él todo el dibujo. Automáticamente la bisectriz se adaptará al movimiento del punto y la distancia de los puntos D y E irá cambiando.

Esto hace que el alumno pueda observar las variaciones en los objetos sin tener que realizar nuevos gráficos.



3. APLICACIÓN AL ESTUDIO DE TRIÁNGULOS Y SUS PUNTOS NOTABLES.

Como aplicación a la representación de lugares geométricos podemos calcular las mediatrices de los lados de un triángulo. Al hacer esto veremos el Circuncentro del triángulo. Además resulta muy sencillo comprobar que es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo simplemente usando el sexto icono y seleccionando circunferencia por su centro y punto que cruza.

Igual que antes hicimos con la bisectriz podemos desplazar, usando el primer icono, uno de los vértices del triángulo y así veremos cómo se mueven las mediatrices (en color azul), el circuncentro y la circunferencia.



Podemos representar también las **bisectrices**, en lila, las medianas, en rojo y las alturas, en verde. Es fácil representar la **recta de Euler**, que aparece en amarillo. Es curioso mover uno de los vértices y analizar los cambios que se producen en la figura. Por ejemplo se puede ver que el **Baricentro** (punto de corte de las **medianas**), **Ortocentro** (punto de corte de las **alturas**) y **Circuncentro** están siempre alineados mientras que no ocurre así con el **Incentro** (punto de corte de las bisectrices).

Puede verse también que algunos permanecen dentro del triángulo, Incentro y Baricentro, mientras que Ortocentro y Circuncentro pueden estar tanto dentro como fuera de la figura dependiendo del caso.





En la pantalla de la izquierda del programa aparecen los puntos con sus coordenadas y las rectas con su ecuación.

Si desplazamos un punto del gráfico podemos ver los cambios también en esta pantalla algebraica y así ir analizando, de forma más completa, las transformaciones que se producen.

4. CONTRIBUCIÓN DE GEOGEBRA A LA CONSECUCIÓN DE LAS COMPETENCIAS BÁSICAS.

Trabajar con programas informáticos, como Geogebra, contribuye de forma activa a la consecución de las **competencias básicas**.

Es clara la contribución a la competencia **matemática** pues vamos a trabajar con conceptos matemáticos que, además, trataremos de forma visual y manipulativa.

Cada alumno puede adoptar distintos ritmos de trabajo según sus necesidades. Incluso los alumnos más adelantados cuando vayan terminando la tarea pueden ir probando con otras opciones del programa y descubrir nuevos recursos. Esto favorece el desarrollo de la **autonomía e iniciativa personal**. Ellos mismos serán conscientes de que, a medida que vayan profundizando en su



conocimiento sobre el tema, consiguen aprovechar mejor la información y los recursos que proporciona el programa.

Al utilizar formas geométricas y las relaciones entre ellas estamos favoreciendo al **conocimiento y la interacción con el mundo físico.**

El trabajo con la geometría proporciona herramientas para admirar y valorar expresiones artísticas. Estudiando propiedades geométricas ayudamos a que los alumnos comprendan mejor elementos de la arquitectura y otras artes. Este conocimiento contribuye a potenciar la competencia en **expresión** cultural y artística.

Incorporando en nuestras clases las nuevas tecnologías ayudamos a mejorar las habilidades de nuestros alumnos en lo que se refiere a la competencia en tratamiento de la información y competencia digital. Deberán analizar los datos que el programa necesita para poder así proporcionárselos y resolver las situaciones correctamente. Podrán desarrollar su habilidad en el trabajo con programas informáticos y aprender a manejar archivos en distintos formatos.

Autoría:

• E-mail: pilarguerracardenas@hotmail.com

[•] Nombre y Apellidos: M^a del Pilar Guerra Cárdenas

[•] Centro, localidad, provincia: I.E.S. Al-Guadaira, Alcalá de Guadaira, Sevilla