REVISTA DIGITAL INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 14 – ENERO DE 2008

"LA CLASIFICACIÓN DE CÓNICAS"

AUTORÍA **MARÍA DEL CARMEN GARCÍA JIMÉNEZ**
TEMÁTICA **MATEMÁTICAS**
ETAPA **BACHILLERATO, UNIVERSITARIA**

Resumen

A partir de la idea de lugar geométrico se puede hacer una introducción al concepto de cónicas; esta introducción se puede llevar a cabo con los alumnos de 1º de Bachillerato Científico Tecnológico. Estas nociones previas a cerca de las Cónicas sentarán las bases para estudios posteriores, en los cuales se estudiará la clasificación de cónicas a partir de los Invariantes o a partir de la expresión de la cónica en coordenadas homogéneas.

Este artículo se centra en la clasificación de las Cónicas a partir de los Invariantes. Las dividiremos en dos grandes grupos según si el primer invariante es distinto de cero o bien nulo. En el primer caso la cónica se denomina Irreducible u Ordinaria (también Regular) y en el segundo caso cónica Reducible o Degenerada. Pero se puede hacer una nueva clasificación sin necesidad de recurrir a las ecuaciones reducidas de la cónica, esta nueva clasificación que se propone se hace a partir de la expresión de la cónica en coordenadas homogéneas

Palabras clave

Cónicas Degeneradas.

Cónicas No degeneradas.

Ecuaciones Reducidas.

Invariantes.

Elipse.

Parábola.

Hipérbola.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 14 – ENERO DE 2008

1. CONSIDERACIONES GENERALES.

Podemos expresar la ecuación de una cónica como una ecuación polinómica de segundo grado con dos incógnitas:

$$a_{00}+2a_{01}x+2a_{02}y+a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy=0$$

Esa ecuación de la cónica se puede escribir en Forma Matricial; siendo la matriz de la cónica simétrica:

$$(1, x, y).\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Esa Cónica escrita de esa forma está referida a ejes ortonormales y si la referimos a sus propios ejes resultan las llamadas Ecuaciones Reducidas, para ello se somete a la cónica a una traslación y un giro.

La obtención de las ecuaciones reducidas de las cónicas, consiste en obtener un sistema de referencia ortonormal, distinto al inicial, de forma que la cónica se pueda expresar de la forma más sencilla posible, esto lo podremos conseguir a través de un giro y una traslación.

Los tres Invariantes que tenemos al cambiar el sistema de referencia son:

- Invariante Proyectivo: $|A|$
- Invariante Cuadrático: $A_{00} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$
- Invariante Lineal: $I = a_{11} + a_{22}$

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 14 – ENERO DE 2008

2. ESTUDIO GENERAL DE LAS CÓNICAS.

La clasificación de las cónicas puede hacerse:

A. A partir del Invariante Proyectivo, $|A|$:

- $|A| \neq 0 \Rightarrow$ Cónica No Degenerada o Irreducible (también se llama Regular u Ordinaria).
- $|A| = 0 \Rightarrow$ Cónica Degenerada o Reducible.

B. A partir del Invariante Cuadrático, A_{00}: En este caso tendremos en cuenta las siguientes proposiciones:

- **<u>Proposición</u>**: Dada una cónica de matriz A, si el elemento $a_{12} \neq 0$, podemos encontrar un ángulo α tal que al efectuar un giro de los ejes coordenados de dicha amplitud, la nueva matriz B de la Cónica cumpla que $a'_{12} = 0$. (En caso de $a_{12} = 0$, no necesitaríamos ese giro).

- **<u>Proposición</u>**: Si $A'_{00} = a'_{11}.a'_{22} \neq 0$ se puede obtener una traslación de forma que la matriz de la cónica sea diagonal.

$$A'_{00} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & 0 \\ 0 & a'_{22} \end{vmatrix}$$

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 14 – ENERO DE 2008

2.1. Cónicas No Degeneradas.

Estas cónicas son aquellas en las que $|A| \neq 0$ y las clasificaremos según el segundo invariante A_{00}.

2.1.1. $|A| \neq 0, A_{00} \neq 0$

Al ser $A_{00} \neq 0$ se puede obtener una traslación de forma que la matriz de la cónica en su ecuación reducida es una matriz diagonal; por tanto el determinante de la nueva matriz, B, corresponde a la forma:

$$|B| = \begin{vmatrix} a'_{00} & 0 & 0 \\ 0 & a'_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a'_{22} \end{vmatrix} = a'_{00}.a'_{11}.a'_{22}$$

La ecuación reducida de la cónica corresponde a la forma:

$$(1, x, y).\begin{pmatrix} a'_{00} & 0 & 0 \\ 0 & a'_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a'_{22} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a'_{11}x^2 + a'_{22}y^2 + a'_{00} = 0}$$

Ahora se tratará de hallar a'_{11}, a'_{22}, a'_{00}, para ello se recurre a los Invariantes, de donde observamos que tenemos un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas, que una vez resuelto nos determina los coeficientes de la ecuación reducida:

$$|B| = \begin{vmatrix} a'_{00} & 0 & 0 \\ 0 & a'_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a'_{22} \end{vmatrix} = a'_{00}.a'_{11}.a'_{22} = |A|$$

$$A'_{00} = \begin{vmatrix} a'_{11} & 0 \\ 0 & a'_{22} \end{vmatrix} = a'_{11}.a'_{22} = A_{00}$$

$$I' = a'_{11} + a'_{22} = I$$

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 14 – ENERO DE 2008

Obteniendo finalmente la ecuación reducida de la cónica en forma tradicional:

$$\boxed{\frac{x^2}{-a'_{00}/a'_{11}} + \frac{y^2}{-a'_{00}/a'_{22}} = 1}$$

Se trata de la ecuación de elipses, hipérbolas y del par de rectas no paralelas, para distinguirlas nos fijaremos en el signo o en la anulación del segundo invariante A_{00}:

2.1.1.A) Si $A_{00} > 0 \Rightarrow$ Se trata de una ELIPSE.

- Si el signo del $|A|$ = signo del $\mathrm{I} \Rightarrow$ Se trata de una ELIPSE IMAGINARIA.
- Si el signo del $|A|$ $\neq$ signo del $\mathrm{I} \Rightarrow$ Se trata de una ELIPSE REAL.
- Caso particular: Si $a_{12} = 0$ y $a_{11} = a_{22} \Rightarrow$ Se trata de una CIRCUNFERENCIA.

2.1.1.B) Si $A_{00} < 0 \Rightarrow$ Se trata de una HIPÉRBOLA.

- Caso particular: Si $\mathrm{I} = 0 \Rightarrow$ Se trata de una HIPÉRBOLA EQUILATERA.

2.1.2. $|A| \neq 0, A_{00} = 0$. En este caso existen 2 matrices de la ecuación reducida.

Como $A_{00} = 0$ estas cónicas tienen un solo centro, que es un punto impropio o bien una recta de centros. Al ser $A_{00} = 0$ van a existir 4 matrices posibles, pero como $|A| \neq 0$ quedan reducidas a 2, que corresponden a los siguientes 2 casos:

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 14 – ENERO DE 2008

2.1.2.A) Parábola Simétrica respecto del Eje X.

$$|B| = \begin{pmatrix} 0 & a'_{01} & 0 \\ a'_{01} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a'_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow$$ Matriz cuya ecuación representa una Parábola simétrica respecto al eje X:

$$\boxed{2a'_{01}x + a'_{22}y^2 = 0}$$

2.1.2.B) Parábola Simétrica respecto del Eje Y.

$$|B| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a'_{02} \\ 0 & a_{11} & 0 \\ a'_{02} & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ Matriz cuya ecuación representa una parábola simétrica respecto al eje Y:

$$\boxed{2a'_{02}y + a'_{11}x^2 = 0}$$

Para obtener en ambos casos la ecuación reducida se procede operando con los Invariantes (como se dijo anteriormente).

2.2. Cónicas Degeneradas.

Estas cónicas son aquellas en las que $|A| = 0$ y las clasificaremos, otra vez, a partir del segundo invariante A_{00}.

2.2.1. $|A| = 0, A_{00} \neq 0$

En este caso la matriz de la ecuación reducida de la cónica es diagonal. El determinante de la matriz es cero, por tanto se tendrá:

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 14 – ENERO DE 2008

$$\left.\begin{array}{l} |A| = a'_{00}.a'_{11}.a'_{22} = 0 \\ \\ A_{00} = a'_{11}a'_{22} \neq 0 \end{array}\right\}$$ De aquí se deduce: $a'_{00} = 0$; $a'_{11} \neq 0$; $a'_{22} \neq 0$

Por tanto, la ecuación reducida de la cónica será: $\boxed{a'_{11}x^2 + a'_{22}y^2 = 0}$ **(1)**

Se trata de una Cónica Degenerada Simétrica respecto de ambos ejes y respecto del origen.

Para calcular a'_{11} y a'_{22} se recurre a los Invariantes de la Cónica que nos dan un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas:

$$A_{00} = a'_{11}.a'_{22}$$

$$I = a'_{11} + a'_{22}$$

2.2.1.A) $A_{00} > 0 \Rightarrow a'_{11}.a'_{22} > 0$

Este caso implica que a'_{11} y a'_{22} son del mismo signo (o ambos positivos o ambos negativos). Si consideramos que los dos son positivos (si fueran negativos serian igual pero multiplicados por -1) la ecuación **(1)** la podemos escribir de la siguiente forma:

$$\boxed{x^2 = \frac{-a'_{22}}{a'_{11}}y^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{a'_{22}}{a'_{11}}}iy}$$

Se trata de 2 RECTAS IMAGINARIAS CONJUGADAS que pasan por el origen.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 14 – ENERO DE 2008

2.2.1.B) $A_{00} < 0 \Rightarrow a'_{11}.a'_{22} < 0$

Este caso implica que a'_{11} y a'_{22} son de distinto signo, entonces la ecuación **(1)** la podemos escribir de la siguiente forma:

$$\boxed{x^2 = \frac{-a'_{22}}{a'_{11}} y^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-a'_{22}}{a'_{11}}} y}$$

Se trata de 2 RECTAS REALES que pasan por el origen.

2.2.2. $|A| = 0, A_{00} = 0$. Tenemos dos tipos de matrices de la ecuación reducida:

Como $A_{00} = 0$ estas cónicas tienen un solo centro, que es un punto impropio o bien una recta de centros. Al ser $A_{00} = 0$ van a existir 4 matrices posibles, pero como $|A| \neq 0$ quedan reducidas a 2:

2.2.2.A) Para la primera matriz su ecuación reducida viene dada de la siguiente forma:

$|B| = \begin{pmatrix} a'_{00} & 0 & 0 \\ 0 & a'_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Matriz cuya ecuación representa una curva simétrica respecto al eje Y:

$$\boxed{a'_{00} + a'_{11} x^2 = 0}$$

Esa ecuación reducida de la cónica se puede expresar de la siguiente otra forma:

$$x^2 = \frac{-a'_{00}}{a'_{11}} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-a'_{00}}{a'_{11}}}$$

- Si $A_{11} + A_{22} > 0 \Rightarrow$ Tengo 2 RECTAS IMAGINARIAS PARALELAS.
- Si $A_{11} + A_{22} < 0 \Rightarrow$ Tengo 2 RECTAS REALES PARALELAS.
- Si $A_{11} + A_{22} = 0 \Rightarrow$ Tengo 2 RECTAS COINCIDENTES (Eje Y).

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 14 – ENERO DE 2008

2.2.2.B) Para la segunda matriz, la ecuación reducida de la cónica es la siguiente (que es el caso anterior donde se han cambiado los ejes X e Y) de donde se obtendrán dos rectas imaginarias o dos rectas reales paralelas.

$|B| = \begin{pmatrix} a'_{00} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a'_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow$ Matriz cuya ecuación representa una curva simétrica respecto al eje X:

$$\boxed{a'_{00} + a'_{22} y^2 = 0}$$

Esa ecuación reducida de la cónica se puede expresar de la siguiente otra forma:

$$y^2 = \frac{-a'_{00}}{a'_{11}} \rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{-a'_{00}}{a'_{11}}}$$

- Si $A_{11} + A_{22} > 0 \Rightarrow$ Tengo 2 RECTAS IMAGINARIAS PARALELAS.
- Si $A_{11} + A_{22} < 0 \Rightarrow$ Tengo 2 RECTAS REALES PARALELAS.
- Si $A_{11} + A_{22} = 0 \Rightarrow$ Tengo 2 RECTAS COINCIDENTES (Eje X).

Para este tipo de cónicas hemos usado $\mathrm{I} = a'_{11}$, pero además existe otro Invariante exclusivo de estas cónicas que es: $A_{11} + A_{22} = A'_{11} + A'_{22}$ de donde $A'_{11} = 0$; $A'_{22} = a'_{00}.a'_{11}$

3. OTRO MÉTODO DE CLASIFICACIÓN DE CÓNICAS.

Podemos clasificar las Cónicas sin necesidad de recurrir a su ecuación reducida; esta nueva clasificación que se propone se hace a partir de la expresión de la cónica en coordenadas homogéneas; para ello cortamos la cónica por la recta impropia z=0 y consideramos el discriminante (Δ) de la correspondiente ecuación de 2º grado en Y.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 14 – ENERO DE 2008

4. BIBLIOGRAFÍA.

- Abellanas, P. (1970). *Elementos de Matemáticas*. Madrid: Ed. Romo.
- Stein, S. K. (1984). *Cálculo y geometría Analítica*. México: Ed. McGrawHill.
- Puig Adam, P. (1973).*Curso de Geometría métrica I y II*. Madrid: Ed. Biblioteca Matemática.
- Abellanas, P. (1969). *Geometría Básica*. Madrid: Ed. Romo.
- Wulff, L. (2005).*Geometría Plana. Semejanzas. Triángulos. Circunferencia*. Granada: Ed. C.S.V.
- http://portales.educared.net/wikillerato/?idapr=12_1032_esp_1__

Autoría

- Nombre y Apellidos: María del Carmen García Jiménez.
- Centro, localidad, provincia: Granada.
- E-mail: carmengj26@hotmail.com