ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 14 – ENERO DE 2009

“PROPORCIONES NOTABLES”

AUTORÍA **PATRICIA PÉREZ ORTIZ**
TEMÁTICA **MATEMÁTICAS**
ETAPA **ESO**

Resumen

Con este artículo se pretende desde un enfoque matemático realizar una excursión al mundo de las proporciones, las cuales serán consideradas tanto desde el punto de vista geométrico como numérico o algebraico. También se pondrán de relieve algunas de sus aplicaciones a la ciencia, al arte y a la técnica.

Palabras clave

Proporción. Razón.

1. APARTADO: ANTECEDENTES HISTÓRICOS

En el siglo V a.C. el descubrimiento de las magnitudes llamadas “inconmensurables” (que no podían expresarse de forma exacta mediante el uso de números enteros por más que se subdividiera la unidad de medida) conmovió los fundamentos de la matemática griega. Desplazó la aritmética (los números) del centro del escenario y su lugar lo ocupó la geometría.

La teoría de proporciones, que se encuentra en los libros V y VI de los *Elementos* de **Euclides** y que se atribuye en su mayor parte al matemático griego **Eudoxo de Cnido**, parece ser un intento de solución del problema de las magnitudes inconmensurables. En el libro V de los Elementos se encuentra la siguiente definición:

Razón es la relación cualitativa en lo que se refiere a la dimensión entre dos cantidades homogéneas.

La proporción ($\alpha\nu\alpha\lambda o\gamma\iota\alpha$) es la igualdad entre razones.

Los matemáticos griegos reservaban el nombre ‘números’ para los números naturales considerando el resto como razones entre magnitudes homogéneas. La teoría de proporciones esconde un intento de construcción de una nueva teoría numérica desde la geometría. De ahí ese halo mitad geométrico mitad numérico que hace especialmente interesante y atractivo el estudio de las proporciones.

No es de extrañar que de la mano de la geometría dicha teoría repercutiera e hiciera sonar su voz en la filosofía, en la idea de belleza y en consecuencia en el arte. Como dice **Santo Tomás de Aquino** “Los sentidos se deleitan con las cosas que tienen las proporciones correctas”. Las formas consideradas bellas lo son sin duda, entre otras muchas cosas, por el respeto de determinadas proporciones.

INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS — REVISTA DIGITAL

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 14 – ENERO DE 2009

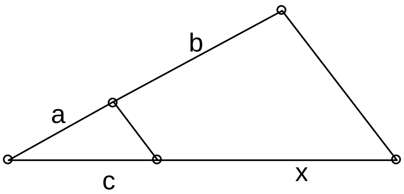
Subyacente a cualquier obra de arte existe una estructuración del espacio artístico y para tal tarea son de gran utilidad las formas y objetos de la geometría. La Teoría de la Proporción es actualmente un cuerpo doctrinal que desde la matemática y la geometría irradian su influjo sobre las carreras de Arte y Arquitectura.
En el siglo XIX las nuevas teorías sobre la construcción de los números reales, a base de las cortaduras de **Dedekind** o de las sucesiones de **Cauchy** de números racionales, resolvió de forma expeditiva el problema de las magnitudes inconmensurables. Y como consecuencia el foco científico se desplazaría de la teoría de las proporciones, la cual perdió su papel central en la construcción de los conjuntos numéricos quedando relegada a una discreta penumbra.

2. APARTADO: DEFINICIONES, VOCABULARIO Y CONSTRUCCIONES ELEMENTALES.

Dados dos números positivos *a* y *b* se llama <u>razón</u> entre *a* y *b* al cociente $\frac{a}{b}$.

Dos razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ se dicen iguales o equivalentes si $ad = bc$ (*producto de extremos igual a producto de medios*) y se expresa $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. La igualdad entre razones se denomina <u>proporción</u>.

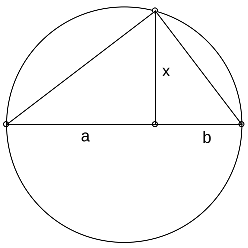
En la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *a*, *b, c* y *d* son sus elementos o términos. De la misma *a* y *c* se llaman antecedentes, *b* y *d* consecuentes; *b* y *c* se dicen los medios, *a* y *d* los extremos.
Más definiciones:
Dada una terna *a*, *b, c* de números positivos se llama <u>cuarta o cuarto proporcional</u> al número *x* que verifica: $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ y dada una pareja *a*, *b* de números positivos se llama <u>tercera o tercero proporcional</u> al número *x* que verifica: $\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$.
La construcción o representación geométrica de ambas proporcionales mediante la regla y el compás es una aplicación del teorema de **Tales**:



Cuarta proporcional

Dada la pareja *a*, *b* de números positivos se llama media o, más precisamente, <u>media proporcional</u> o <u>media geométrica</u> al número *x* que verifica: $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$, es decir $x = \sqrt{ab}$. Una de las posibles

"construcciones" o representación geométrica de la media proporcional mediante regla y compás tiene su fundamento en el teorema de la altura para triángulos rectángulos:
"En un triángulo rectángulo la altura sobre la hipotenusa es media proporcional de las proyecciones sobre ésta de los catetos"



Media proporcional

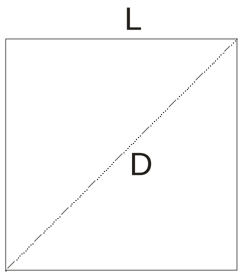
Una proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ viene definida por cualquier par de números, *a*, *b*, por lo que el objeto geométrico por excelencia para visualizarla es el rectángulo. Cada razón $\frac{a}{b}$ permite construir un rectángulo. Y razones equivalentes originan rectángulos semejantes. Si además el rectángulo es construible mediante los instrumentos clásicos de la regla y el compás la reproducción y generación de rectángulos semejantes es sencilla.

3. APARTADO: ALGUNAS PROPOCIONES NOTABLES

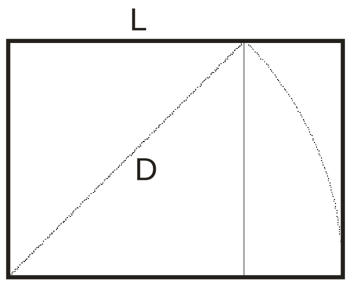
3.1. Subapartado: La raíz cuadrada de 2.

Es una de las proporciones y números más famosos de la matemática y de la ciencia pues muchos historiadores sostienen que en dicha proporción se descubrió la existencia de las magnitudes inconmensurables. La demostración de la no racionalidad de dicho número es una de las primeras joyas de la demostración en matemáticas.
Se llama raíz cuadrada de 2 a la proporción existente entre la diagonal y el lado del cuadrado. Dicha proporción se representa por el símbolo $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$. Dicho número es solución de la ecuación $x^2 = 2$.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 14 – ENERO DE 2009



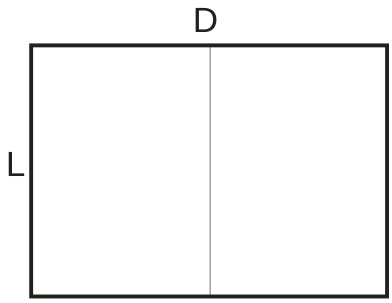
La diagonal del cuadrado



Rectángulo $\sqrt{2}$

En virtud del teorema de **Pitágoras** $D^2 = 2L^2$, $D = L\sqrt{2}$ y en consecuencia $\frac{D}{L} = \sqrt{2}$.

Una de las particularidades de este rectángulo, que lo convierte en especialmente útil, reside en la forma simple de generar rectángulos semejantes mediante la división en dos partes iguales del lado mayor.



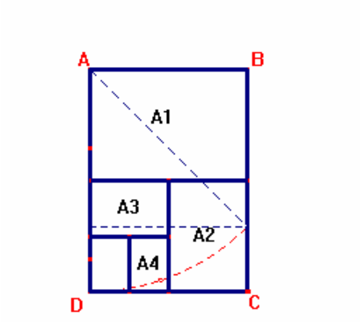
Obtención de rectángulos $\sqrt{2}$ **mediante bisección**

Como $D^2 = 2L^2$, $\frac{D^2}{2} = L^2$, lo que traducido al lenguaje de las proporciones nos lleva a $\frac{D}{L} = \frac{L}{D/2}$. Y en consecuencia ambos rectángulos son semejantes.

Esta particularidad se ha usado en el arte y en la industria, por ejemplo en el diseño de la norma DIN del formato del papel. El formato A0 es uno de estos rectángulos cuyos lados están en la proporción $\sqrt{2}$, en concreto el de superficie 1 m^2. El formato A1 se genera mediante la división por la mitad del formato A0. El nuevo rectángulo así obtenido es semejante al primero. Y así sucesivamente. Todos estos formatos son, pues, semejantes.

REVISTA DIGITAL INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 14 – ENERO DE 2009



Norma DIN

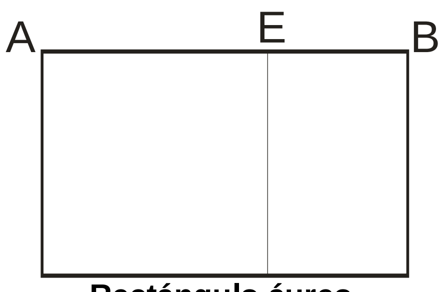
3.2. Subapartado: La razón áurea o el número de oro

Sin duda ninguna ésta es la proporción más famosa. Leonardo da Vinci le otorgaría el nombre de número de oro. Simbólicamente se le designa por la letra griega Φ, inicial de Fidias, escultor y arquitecto del Partenón de Atenas. También recibe el nombre de divina proporción.

Algunos historiadores de la ciencia sostienen que en dicha proporción, y no en la existente entre la diagonal y el lado del cuadrado, se descubrió la existencia de las magnitudes inconmensurables. En su apoyo estaría la relación existente entre el número de oro y el polígono regular estrellado de 5 puntas, emblema de la secta de los pitagóricos, filósofos griegos para quienes los números eran el elemento cognoscible de la naturaleza.

Consideraciones geométricas

Se llama rectángulo de oro o áureo a aquél del que si se substrajera un cuadrado el nuevo rectángulo resultante sería semejante al primero.



Rectángulo áureo

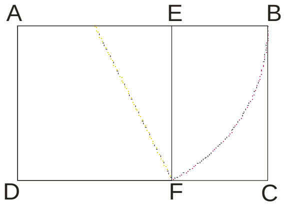
Usando el lenguaje de las proporciones $\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}$. El número de oro, Φ, es cualquiera de estas razones.

A la división del segmento AD mediante el punto E de forma que AE sea media proporcional entre AD y ED se llama sección áurea.

Para construir un rectángulo áureo se parte de un cuadrado ADFE, y por el punto medio de uno de sus lados, AE por ejemplo, se traza el segmento que lo une a uno de los vértices del lado opuesto. Dicho segmento se abate sobre la prolongación del lado AE obteniendo el lado mayor del rectángulo áureo, y siendo su lado menor el lado del cuadrado.

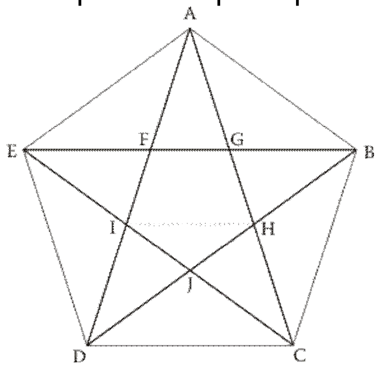
REVISTA DIGITAL INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 14 – ENERO DE 2009



Construcción del rectángulo áureo

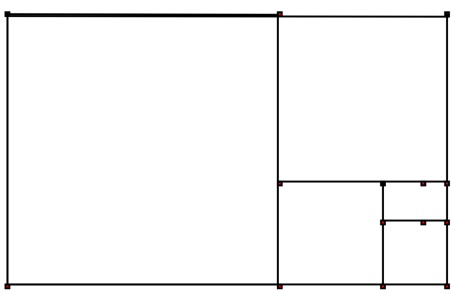
El número de oro es también la proporción existente entre las diagonales del pentágono regular (tiene todas sus diagonales iguales) y la medida de sus lados. O si se prefiere entre el lado del polígono regular estrellado y el lado del pentágono a partir del que aquél se construye.



Pentágono regular estrellado o estrella pitagórica

Los triángulos como BCG son isósceles y en consecuencia $\overline{CI}=\overline{CG}=\overline{BJ}=\overline{BF}=\Lambda$ y la medida de todos ellos y sus similares coincide con el lado del pentágono. Por la semejanza de los triángulos BCD y CDJ $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{DC}}{\overline{DJ}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{BJ}}=\frac{\overline{BJ}}{\overline{DJ}}$. J es, pues, la sección áurea del segmento BD y el número de oro es la proporción existente entre la diagonal y el lado del pentágono regular.

Al igual que ocurría con el rectángulo que representaba la raíz cuadrada de 2 también el rectángulo áureo encierra un enorme poder de regeneración y autorreproducción. Sin necesidad de medidas externas, al sustraer del rectángulo áureo el cuadrado obtenido a partir de su lado menor surge, como si de un descendiente se tratara, otro rectángulo áureo. De la misma forma que en el interior del pentágono regular al trazar sus diagonales surge un nuevo pentágono regular.



Autorreproducción del rectángulo áureo

REVISTA INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS DIGITAL

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 14 – ENERO DE 2009

Consideraciones algebraicas

Si se toma como unidad la medida del lado $\overline{AE}$ del cuadrado, la proporción áurea adoptaría la forma $\frac{\overline{AB}}{1} = \frac{1}{\overline{EB}} = \Phi$. El segmento $\overline{AB}$ sería la representación geométrica del número de oro.

Substituyendo $\overline{EB}$ por $\Phi - 1$, se obtendrían las igualdades $\Phi = \frac{1}{\Phi - 1}$, $\Phi(\Phi - 1) = 1$, $\Phi^2 - \Phi = 1$, $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$, ecuación cuadrática de soluciones $\Phi = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Dejando de lado la solución negativa, que no viene al caso, $\Phi = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}6180\ldots$.

El poder de autorreproducción del número de oro se refleja también en sus propiedades algebraicas. Si se considera la sucesión geométrica de las potencias del número Φ:

$$1, \Phi, \Phi^2, \Phi^3 \Lambda$$

el cociente entre cualquiera de los términos de la sucesión y su precedente es el número de oro. Tomándolos por parejas y haciendo de ellas las medidas de los lados de rectángulos, se obtendrían infinidad de modelos, ascendientes y descendientes del rectángulo áureo.

La relación $\Phi^2 = 1 + \Phi$ permite vislumbrar las propiedades aditivas de la sucesión geométrica anterior: *Cada término de la sucesión es suma de sus dos términos precedentes* (definición de la sucesión de **Fibonacci** generalizada).

$$\begin{aligned}
&\Phi^2 = 1 + \Phi \\
&\Phi^3 = \Phi^2\Phi = (1 + \Phi)\Phi = \Phi + \Phi^2 = 1 + 2\Phi \\
&\Phi^4 = \Phi^3\Phi = (\Phi + \Phi^2)\Phi = \Phi^2 + \Phi^3 = 2 + 3\Phi \\
&\Phi^5 = \Phi^4\Phi = (\Phi^2 + \Phi^3)\Phi = \Phi^3 + \Phi^4 = 3 + 5\Phi \\
&\Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda
\end{aligned}$$

La sucesión de coeficientes 1, 1, 2, 3, 5, … es precisamente la sucesión de Fibonacci.

Por ello no es extraño que el número de oro sea también el valor al que tiende la razón entre los términos consecutivos, la proporción subyacente, de la sucesión de Fibonacci,.

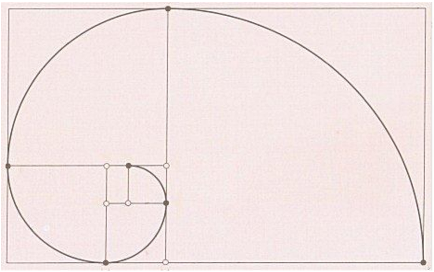
$$\frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{F_{n-1} + F_{n-2}}{F_{n-1}} = 1 + \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}}.$$

Si el límite de $\frac{F_n}{F_{n-1}}$ se designa por *x*, dicho límite deberá verificar la igualdad $x = 1 + \frac{1}{x}$, o $x^2 = x + 1$, una de las igualdades que definen el número de oro.

El número de oro constituyó durante muchos siglos un canon de belleza, un ideal y un esquema para la composición de la obra artística. Se sabe que influyó enormemente sobre el arte, la mística, la biología y los gremios de la Edad Media. La *divina proporción*, que es otro de sus nombres, está presente en el

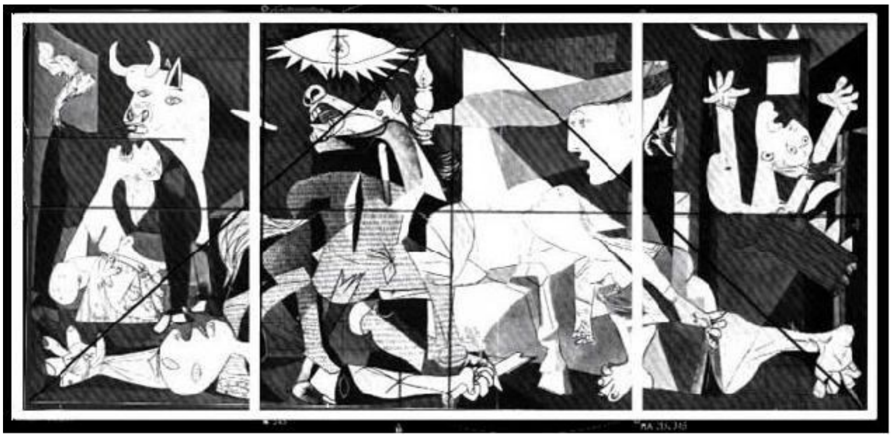
ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 14 – ENERO DE 2009

arte de Egipto, la India, China y el Islam, en monumentos como las Pirámides y la Alhambra de Granada. Florece en el arte griego, se esconde en la arquitectura gótica de la Edad Media y resurge en el Renacimiento.
La construcción de la espiral áurea o espiral de Durero, se sustenta sobre el poder autorreproductivo de los rectángulos áureos.



Espiral de Durero

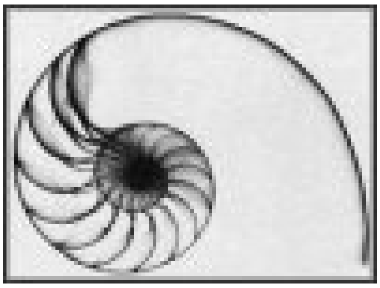
El rectángulo áureo está también presente en muchos objetos y emblemas de nuestra cultura, como en las tarjetas bancarias, en el Documento Nacional de Identidad, en las cajetillas de tabaco, y en las más representativas creaciones del arte moderno



Guernica de Picasso

En su propiedad autorreproductiva y en la generación indefinida del mismo patrón, sin elementos externos, y a distintas escalas, podría residir la razón de la aparición del número de oro, y de su acompañante la sucesión de Fibonacci, en ciertas estructuras biológicas, como muchas formas vegetales (flores y frutos) y animales (conchas de moluscos), uno de cuyos ejemplos más representativos es la concha del Nautilus.

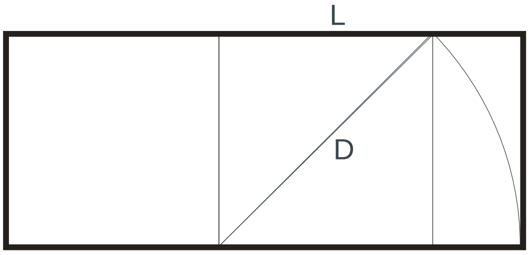
ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 14 – ENERO DE 2009



Concha de Nautilus

3.3 Subapartado: El número de plata

El rectángulo cuyos lados se encuentran en la proporción raíz cuadrada de 2 era generado por el cuadrado. Si a dicho rectángulo se le yuxtapone un cuadrado igual al anterior se obtiene un nuevo rectángulo, llamado de plata. La proporción entre el lado mayor y menor se denomina número de plata o θ y es igual a $1+\sqrt{2}\approx 2{,}4142$.



Rectángulo de plata

El rectángulo de plata disfruta también de propiedades autorreproductivas: si por dos veces se le sustrae el cuadrado a partir del cual es generado se obtiene un nuevo rectángulo de plata.

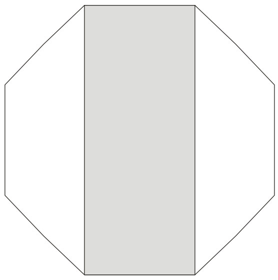
Tomando como unidad el lado del cuadrado las dimensiones del rectángulo de plata son 1 y $\sqrt{2}-1$, las cuales están en la proporción

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}=1+\sqrt{2}$$

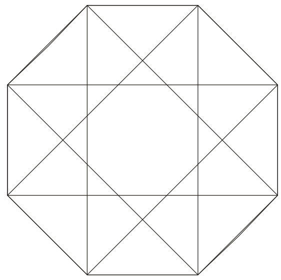
Si a un rectángulo de plata se le sustrae en su parte central el cuadrado que lo genera se obtienen dos rectángulos iguales cuyos lados están en la proporción raíz cuadrada de 2.

La relación del rectángulo de plata con el octógono regular y la estrella regular obtenida del mismo puede contemplarse en los gráficos:

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 14 – ENERO DE 2009



El octógono y el rectángulo de plata



La estrella de 8 puntas y el octógono

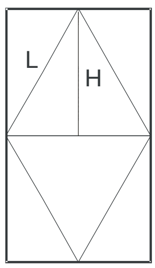
3.4 Subapartado: La proporción cordobesa

Se llama proporción cordobesa a la existente entre el radio y el lado del octógono regular.
Aparece en muchos monumentos y mosaicos de la época de los califas en la ciudad de Córdoba. Su relación con el cuadrado y con su derivado el octógono regular hace de ella una proporción de fácil construcción con aplicaciones a la creación artística y artesanal. La generación de cuadrados y octógonos inscritos y circunscritos hace de la proporción cordobesa una herramienta ideal en la repetición de formas y patrones.

$$L^2 = \left(R - \frac{1}{2}R\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}R\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow L^2 = R^2\left(2-\sqrt{2}\right) \Rightarrow \frac{R}{L} = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \approx 1{,}3066 .$$

3.5 Subapartado: El número raíz de 3

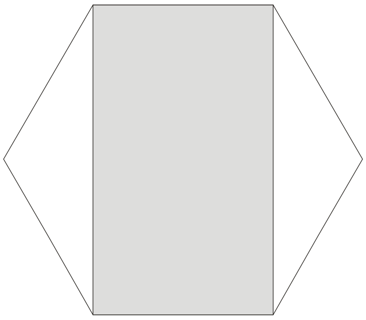
Dejando de lado la relación entre el número de oro, el pentágono regular y la estrella pitagórica todas las proporciones consideradas hasta ahora tenían su base en el cuadrado. Esta nueva proporción se apoya en el triángulo equilátero y en su pariente el hexágono regular, que como es lógico no podían faltar a la cita.

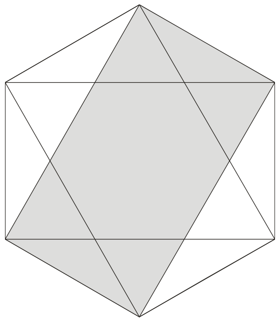


El rectángulo $\sqrt{3}$

$$H^2 = L^2 - \left(\frac{1}{2}L\right)^2 = \frac{3L^2}{4} \Rightarrow 4H^2 = 3L^2 \Rightarrow 2H = L\sqrt{3} \Rightarrow \frac{2H}{L} = \sqrt{3}$$

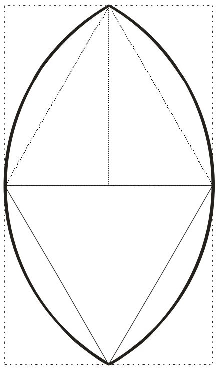
ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 14 – ENERO DE 2009





El rectángulo $\sqrt{3}$ y el hexágono regular **El rectángulo $\sqrt{3}$ y la estrella de David**

El rectángulo $\sqrt{3}$ desempeñó un papel importante en la Geometría Sagrada, a través de la figura conocida como "*vesica piscis*" (vejiga de pez), que se utilizó en los períodos románico y gótico como patrón en el que insertar un Pantocrátor o una Virgen, en la construcción de los arcos ojivales equiláteros y en las plantas de las catedrales góticas.



Vésica Piscis

3.6. Subapartado: El número pi

De todas las proporciones es sin duda la más importante. Sin ella la geometría de la circunferencia y en general de los objetos llamados "redondos" no sería posible.

Se llama número pi y se simboliza por la letra griega del mismo nombre, π, a la proporción existente entre el perímetro o longitud de cualquier circunferencia y su diámetro. Así, pues, si los perímetros y diámetros de dos circunferencias se designan respectivamente por L_1 y D_1 y por L_2 y D_2

$$\pi = \frac{L_1}{D_1} = \frac{L_2}{D_2}$$

Pero el número π esconde muchísimos más secretos. Por ejemplo, en sus *Elementos* **Euclides** había demostrado la existencia de proporcionalidad entre las áreas de los círculos y los cuadrados de los diámetros. Correspondió a **Arquímedes** en su libro *Medida de un círculo*, mediante el método de inscribir y circunscribir polígonos regulares en la circunferencia, demostrar que en dicha constante de proporcionalidad intervenía de nuevo el número π. En palabras de Arquímedes:

El área de cualquier círculo es igual a la de un triángulo rectángulo en el cual uno de los lados alrededor

INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS
REVISTA DIGITAL

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 14 – ENERO DE 2009

del ángulo recto es igual al radio y el otro a la circunferencia del círculo”.

En lenguaje más moderno, algebraico: $S = \frac{1}{2} R 2\pi R = \pi R^2 \Rightarrow \frac{S}{R^2} = \pi$.

Consideraciones algebraicas

Mas tales consideraciones geométricas no suponían el conocimiento del número π. Sería de nuevo **Arquímedes** quien demostraría que la razón del perímetro de un círculo cualquiera a su diámetro es menor que $3+\frac{1}{7}$ y mayor que $3+\frac{10}{71}$. Según nuestro sistema decimal π estaría, pues, comprendido entre 3,140845... y 3,142857...

En el cálculo del número π probarían posteriormente sus armas el cálculo diferencial e integral. Así **Newton**, utilizando el binomio que lleva su nombre, logró calcular el área de un círculo de diámetro 1, y en consecuencia el número π con 7 cifras decimales. Las modernas calculadores exhiben y hacen gala de su potencia calculando cada vez más cifras decimales del misterioso número π, habiendo llegado a superar el millón de ellas.

A la par que esta batalla práctica se libraba también otra más teórica: ¿Era π un número irracional, de aquellos que servían para describir las magnitudes inconmensurables? Hubo que esperar hasta 1767, año en que **Johann Heinrich Lambert** (1728-1777) demostró que π era verdaderamente un número irracional. Y aún más, en 1882 **Ferdinand Lindemann** demostraría otro aspecto de la naturaleza peculiar del número π: éste no era un número algebraico, solución de ecuaciones polinómicas con coeficientes enteros, como todos los obtenidos hasta ahora, número raíz cuadrada de 2, número de oro, número de plata, número raíz cuadrada de 3, número que esconde la proporción cordobesa. π es uno de esos números llamados *trascendentes*, no algebraicos. ¡ π es, pues, un número peculiar!

Autoría

- Nombre y Apellidos: PATRICIA PÉREZ ORTIZ
- Centro, localidad, provincia: IES TORREBLANCA, SEVILLA, SEVILLA
- E-mail: patruki957@yahoo.es