ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 15 – FEBRERO DE 2009

“PROBLEMAS Y EJERCICIOS EN MATEMÁTICAS”

AUTORÍA **PATRICIA PÉREZ ORTIZ**
TEMÁTICA **METODOLOGÍA DE LAS MATEMÁTICAS**
ETAPA **ESO Y BACHILLERATO…**

Resumen

«*Quien quiere hacer algo encuentra un medio; quien no quiere hacer nada encuentra una excusa*». (Proverbio chino)

En el artículo se analiza lo que tienen en común y en lo que se diferencian los problemas y los ejercicios desde el punto de vista de las matemáticas. Las afirmaciones se acompañan de ejemplos con objeto de hacer el artículo más ameno, comprensible y práctico.

Palabras clave

Ejercicio, problema, actividad.

1. INTRODUCCIÓN

Muchos libros de texto están imbuidos de la concepción mecánico-tecnicista de las matemáticas, lo que les lleva a primar en exceso los ejercicios frente a los problemas. Desde dicha concepción los ejercicios son considerados como las “verdaderas actividades” en las que los alumnos miden su nivel de destreza matemática. El predominio excesivo de la componente que cultivan los ejercicios lleva a considerar las matemáticas como algo hecho, ya fosilizado, y en consecuencia “triste”. De esta forma se deja de lado el proceso de descubrimiento, construcción, creación y generación de nuevas ideas y procedimientos, que constituyen el verdadero patrimonio de las matemáticas.

El ser humano es propenso a plantearse preguntas en relación, por ejemplo, con el tiempo, la multiplicidad y el espacio, y a ellas han respondido a su manera las matemáticas. Éstas se componen, pues, de una teoría, un idioma y unas técnicas desarrolladas frente a las cuestiones planteadas y con su enseñanza se pretende que la teoría sea “comprendida”, el idioma sea “hablado” y las técnicas sean puestas en práctica. En general esto se consigue reviviendo y volviendo a plantearse aquellas cuestiones o problemas que dieron nacimiento a la teoría, así como otras nuevas que inviten a su resolución.

La publicación del libro de George Polya *Cómo plantear y resolver problemas* llamó la atención de la comunidad matemática y de los pedagogos por la Resolución de Problemas e inició el camino para su posterior evolución.

2. ¿QUÉ ES UN PROBLEMA Y QUÉ UN EJERCICIO?

Los libros de texto de matemáticas hacen uso de los términos "problema" y "ejercicio" de forma ambigua y poco precisa. En la página de Internet

http://www.unlu.edu.ar/~dcb/matemat/como1.htm

se formula la siguiente definición:

"*Un problema existe cuando hay tres elementos, cada uno claramente definido,*

- *Una situación inicial.*
- *Una situación final u objetivo a alcanzar.*
- *Restricciones o pautas respecto de métodos, actividades, tipos de operaciones, etc., sobre los cuales hay acuerdos previos*".

Es difícil encajar en esta definición la contraposición que los profesores de matemáticas hacen entre ejercicios y problemas. Lo que éstos entienden por ejercicios cumple las tres condiciones que se exigen en la definición anterior a los problemas.

En líneas generales puede afirmarse que un planteamiento o cuestión es un ejercicio cuando su resolución hace intervenir pocos procesos mentales explícitos, y en su mayoría del mismo tipo. Si tal cosa no ocurre la cuestión suele calificarse como problema. El vocablo actividad permite englobar tanto los problemas como los ejercicios así como otro tipo de propuestas educativas como pueden ser los trabajos de investigación.

Así cuando a un alumno con ciertos conocimientos ya adquiridos sobre las fracciones se le propone el siguiente enunciado:

$$\text{Calcula} \quad \frac{1}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}$$

suele considerarse como un ejercicio.

Sin embargo si al mismo alumno y en relación con el mismo asunto se le hace la propuesta siguiente:

"*Si se desea envasar 12 litros de un determinado líquido en botellas de ¾ de litro, ¿cuántas botellas son necesarias?*"

REVISTA DIGITAL INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 15 – FEBRERO DE 2009

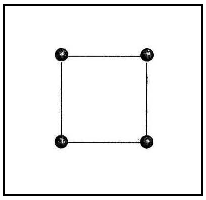
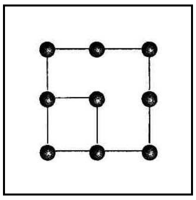
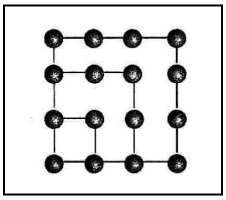
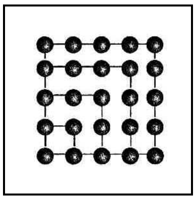
suele considerarse un problema. Tal vez ello sea así porque en el último caso el alumno ha de intentar traducir el lenguaje verbal al lenguaje algebraico-operativo, antes de proceder a la obtención del resultado.

Como dejan suponer las consideraciones anteriores la frontera entre problema y ejercicio, tal como se emplean estas palabras en las clases de matemáticas, es cambiante y de líneas poco nítidos. Una misma cuestión puede ser considerada como problema o como ejercicio, dependiendo del contexto en que se sitúe y del nivel de conocimiento matemático que tenga aquel a quien va dirigida. Se la considerará como ejercicio si está planteada como aplicación de una estructura matemática ya establecida. En un porcentaje muy alto cuestiones candidatas a la consideración matemática de "problemas", al situarlas en un determinado contexto o dentro de una determinada "tecnología" expositiva, pasan a la consideración de simples ejercicios.

Así el enunciado:

Calcula la suma de los 100 primeros números naturales.

si se formula en el contexto de las sucesiones aritméticas, una vez obtenidas las fórmulas del término general y de la suma de los 'n' primeros términos de dichas sucesiones, o si se propone como ejemplo, por supuesto bastante tedioso, del algoritmo de la suma, en ambos supuestos se dice que encierra un ejercicio. Con esta última intención fue propuesto al joven Gauss por su maestro. Mas Gauss, que aún no había adquirido los rudimentos de la teoría de sucesiones, lo elevó de categoría transformándolo en problema y resolviéndolo de forma imprevista y general. La misma sensación que experimentara el joven Gauss es posible sentirla si se recurre al análisis de los cuadrados de la tabla:

CUADRADOS				
	4	9	16	25

contando todos sus elementos mediante el recorrido de los puntos de cada cuadrado en la dirección definida por las diagonales.

La frontera imprecisa a la que antes se ha aludido induce a suponer que los ejercicios y los problemas tienen muchas cosas en común. En primer lugar para que una cuestión pueda ser tratada como problema o ejercicio es necesario que sea mínimamente comprensible para aquel a quien se propone. De lo contrario sería pura jerga, que sólo sirve para hundir en la desesperanza a aquellos a quien es propuesta. No tiene sentido proponer a alumnos de secundaria no capacitados para ellos cuestiones que requieran conocimiento de cálculo infinitesimal o que supongan el dominio maduro de las herramientas del álgebra.

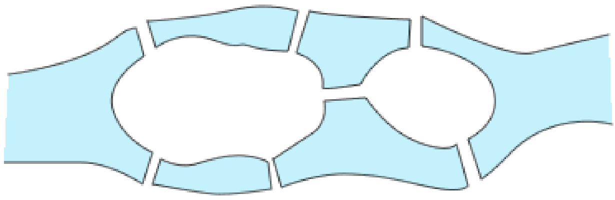
Históricamente hubo cuestiones que durante muchos siglos fueron tratadas como verdaderos problemas dignos del mejor genio matemático y que sin embargo hoy día dentro de la teoría apropiada

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 15 – FEBRERO DE 2009

se consideran simples ejercicios. El famoso problema de los puentes de Könisberg, que en tiempos de Euler constituía motivo de pública y popular discusión, se tiene por trivial dentro de la teoría de grafos, a la que el problema antes mencionado dio nacimiento.

El enunciado decía así:

La ciudad de Könisberg estaba atravesada por el río Pregel, en cuyo cauce había dos islas unidas por siete puentes, como muestra el gráfico siguiente:



¿Podrían sus habitantes dar un paseo recorriendo todos los puentes sin repetir ninguno?

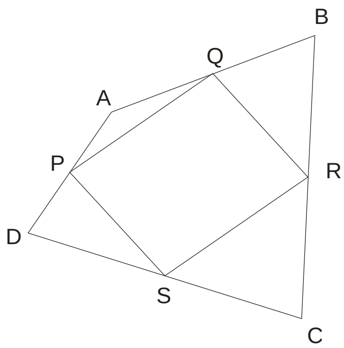
El cálculo de las rectas tangentes constituyó un colosal problema en los albores del cálculo infinitesimal, al igual que la resolución algebraica de ecuaciones lo fue en el Renacimiento Italiano. Ambos, sin embargo, son simples ejercicios dentro de las correspondientes teorías matemáticas.

Otras veces sucede que una propuesta que en un determinado nivel de enseñanza es candidata a ser catalogada como problema se diluye como un azucarillo al dividirlo en tantas partes que cada una de ellas sea trivial. Supóngase que a alumnos con nivel adecuado se les pide la siguiente actividad:

Demostrar que al unir los puntos medios de cualquier cuadrilátero se obtiene un paralelogramo,

Y para conseguir tal propósito se les proporciona el siguiente guión y dibujo:

- *Sobre un cuadrilátero ABCD dibujar el cuadrilátero QRSP, donde Q es el punto medio de AB, R el punto medio de BC, S de CD y P de DA.*



- *Dibujar las diagonales BD y AC del primer cuadrilátero.*
- *Aplicar el teorema de Tales para comprobar que PQ es paralelo a BD y RS a BD. Concluir que PQ y RS son paralelos.*

REVISTA DIGITAL INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 15 – FEBRERO DE 2009

- *Demostrar análogamente que QR es paralelo a PS.*

A medida que se avanza en el conocimiento matemático con frecuencia la frontera entre los ejercicios y los problemas se hace más borrosa. Cuando a los alumnos de los últimos cursos de bachillerato se les propone el estudio analítico y la representación gráfica de una función no es fácil clasificar tal propuesta como ejercicio o como problema, debido a la cantidad de conocimientos y herramientas que es necesario manejar, y a la revisión constante a que deber sometidos los resultados parciales con objeto de encajarlos unos en otros.

3. LOS PROBLEMAS Y SU IMPORTANCIA

Puede afirmarse que en “el principio de la Matemática fueron los problemas”. Han sido y son los problemas los que hicieron surgir la Matemática. Bajo su aliento el hombre forjó sus armas intelectuales y pulió las teorías matemáticas. De los griegos no sólo hemos heredado los teoremas de sus grandes genios, como Euclides y Arquímedes, sino también los tres problemas llamados “clásicos”:

- La trisección del ángulo
- La cuadratura del círculo
- La duplicación del volumen del cubo.

Los griegos también nos legaron el “terrible” enigma de las “magnitudes inconmensurables”, que finalmente en el siglo XVII fructificaría en el cálculo infinitesimal.

Las complicaciones y los problemas en la gestión de los tributos, en el comercio y en general en las actividades económicas, artesanales e industriales, dieron lugar a los sistemas de numeración y a las operaciones con los números, hasta desembocar en el “moderno” sistema decimal.

Alrededor del año 1651, Antoine Gombauld, conocido como Caballero de Méré, gran aficionado a los juegos de azar, planteó dos problemas que de las manos de Pascal y Fermat condujeron al nacimiento del cálculo de probabilidades. He aquí los dos problemas en esencia:

1) *¿Es o no ventajoso jugar apostando cantidades iguales a que, por lo menos, aparece un 6 en cuatro tiradas de un dado?*

2) *Dos jugadores, lanzan sucesivamente una moneda, el primero gana si sale cara y el segundo si sale cruz. Apuestan una cantidad que ganará el primero si salen 6 caras antes que 6 cruces, en caso contrario ganará el segundo de los jugadores. El juego debe ser interrumpido cuando el primer jugador lleva ventaja de 5 a 3. ¿Cómo deben repartirse la apuesta?*

Un problema exige experimentar, es en cierta forma una aventura intelectual completa.

En la enseñanza primaria y secundaria, y siempre que sea posible, es conveniente que los problemas puedan simularse y manipularse en parte o en sus formas más simples. Bajo este aspecto las modernas herramientas informáticas permiten crear entornos virtuales. Las hojas de cálculo pueden ser útiles en la simulación de propiedades numéricas y los programas de geometría interactiva, tipo Geogebra, lo serán en el de las propiedades geométricas..

Así puede ser interesante para los alumnos que trabajan con la divisibilidad de números enteros problemas del corte siguiente:

Caracterizar los números que sólo tengan 1 divisor, los que tengan 2, 3, 4.

Es posible recorrer un segmento de números naturales calculando el número de divisores de cada uno de ellos, reflejar los datos en una tabla y tratar de inferir de qué números se trata, formular hipótesis sobre su caracterización, comprobar si tal hipótesis es correcta …

O, por ejemplo, si se desea trabajar el tema de los ángulos en relación con la circunferencia experimentar, mediante Geogebra, con la medida de los ángulos inscritos, semiinscritos etc.

Evidentemente, como anteriormente se ha comentado, los problemas lo son a un determinado nivel de la enseñanza y del conocimiento. Lo que es un problema para los alumnos no lo es en general para el profesor. De ahí la dificultad para éste de meterse en la piel de aquél. Y la tendencia de los profesores a convertir en ejercicios lo que para el alumno es conveniente que sean problemas. El profesor no debe suplantar al alumno, debe ayudarlo en el descubrimiento, formulando preguntas, abriendo nuevos caminos cuando se llega a callejones sin salida… Incluso cuando realiza aquellas explicaciones que considera imprescindibles debe hacerlo de forma tal que parezca que el camino surge a medida que lo recorre.

Es frecuente que muchos de los algoritmos que se enseñan en las clases de matemáticas resuelvan grupos enteros de problemas ya formalizados. Sin embargo no se acostumbra a prestar atención al análisis de los mismos, a la observación de sus estructuras comunes, a la creación de un lenguaje mínimo, a su formalización, resolución y posterior discusión. El problema como tal desaparece y en su lugar se enseña la respuesta al mismo antes de que sea formulada la pregunta. Así, por ejemplo, se "venden", sin previa experimentación y casi siempre fuera de contexto, los diferentes métodos de resolución de los sistemas de ecuaciones lineales: reducción, igualación y sustitución.

En su fase inicial los enunciados que llevan al planteamiento de ecuaciones constituyen un buen ejemplo de lo que se entiende por problema siempre que se siga una metodología determinada.

Considérese el siguiente enunciado:

Un motorista emprende un viaje. El primer día recorre los del trayecto, el segundo día los ¾ de lo que le falta aún por recorrer y el tercer y último día recorre los 200 kilómetros que le faltan para llegar a su destino. ¿Cuál es la longitud total del camino?

Para resolver este tipo de problemas se necesitan varios requisitos previos:

- Dominio de las operaciones con fracciones.
- Uso operativo en contexto de la preposición "del".

Una vez adquiridas las dos destrezas anteriores puede pasarse a la formulación algebraica del enunciado, siguiendo el guión siguiente:

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 15 – FEBRERO DE 2009

- Elección de la incógnita. En nuestro caso es natural llamar 'x' a la longitud del camino.
- Descripción de cada uno de los objetos que intervienen en el enunciado usando la incógnita anterior y las operaciones algebraicas. Las tablas pueden ser de gran ayuda para resumir la información:

	Trayecto recorrido
Primer día	$\frac{2}{5}x$
Segundo día	$\frac{3}{4}\left(x-\frac{2}{5}x\right)$
Tercer día	200 km

- Buscar la igualdad implícita. En nuestro caso radica en el hecho de que el trayecto se ha dividido en tres partes de forma que la suma de lo recorrido en cada una de ellas debe ser igual al total del trayecto.

$$\frac{2}{5}x+\frac{3}{4}\left(x-\frac{2}{5}x\right)+200=x$$

- Ya sólo falta la resolución algorítmica de la ecuación anterior.

El problema anterior admite otro enfoque más sencillo, sin recurrir a las ecuaciones, viendo qué parte del recorrido total son los últimos 200 km.

Ésta suele ser una de característica frecuente en los problemas: la multiplicidad de caminos a seguir. En general los problemas no se proponen codificados y no han sido enseñados como tales previamente. De ahí que la resolución de un problema añade algo nuevo a lo conocido; permite crear nuevas redes intelectuales y puntos de vista diferentes. Al resolver problemas se enseña a leer, codificar, interpretar, representar, estimar, hacer conjeturas, sugerir explicaciones…

Por otra parte los problemas apelan con frecuencia a conocimientos de campos diversos, no siempre de matemáticas; analizando las relaciones entre los mismos.

4. LOS EJERCICIOS Y SU IMPORTANCIA

Muchos de los problemas, como luceros que iluminan el camino, han llevado al ser humano a la formulación de teorías matemáticas y científicas. En éstas con frecuencia los problemas pierden algo de su misterio, de su halo mágico, quedando relegados a restos arqueológicos y conservando su prestigio intacto en la enseñanza que les otorga nueva vida. Los problemas sirven de acicate al conocimiento pero la finalidad de éste es dominarlos. Al igual que el hombre aprende a andar sorteando obstáculos y resolviendo cierto tipo de dificultades, hasta convertir el caminar en una rutina y costumbre, así también

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 15 – FEBRERO DE 2009

las teorías científicas amansan los problemas y los convierten en rutinas, en ejercicios. Sólo así el hombre puede plantearse otros retos y la ciencia otros problemas.

Cuando los problemas son "resueltos" por las teorías científicas éstas los convierten en ejercicios. Sólo así las teorías están capacitadas para plantearse nuevos retos y solucionar nuevos problemas. Debido a ello en la dialéctica problema ejercicio reside en parte el ser de la enseñanza. Uno de los quehaceres del profesor es que una vez que los problemas han destilado toda su esencia en la elaboración de las teorías aquéllos se conviertan en ejercicios, en rutinas.

La finalidad principal de los ejercicios es la consecución de destrezas, de manera que tras su repetición puedan realizarse en el menor tiempo posible, y no supongan una rémora en el progreso posterior . Dichas destrezas se refieren tanto al dominio de algoritmos como a la adquisición de conceptos y al uso de un lenguaje apropiado.

La consecución de habilidades en el manejo de los algoritmos es el terreno óptimo para la realización de múltiples ejercicios. Buena prueba de ello es la proliferación en los libros de texto de ejercicios que versan sobre las operaciones con fracciones o la resolución de sistemas de ecuaciones lineales por diferentes métodos.

Si bien los algoritmos se prestan a la realización de múltiples ejercicios éstos también son frecuentes cuando se desea comprender y utilizar determinados conceptos y estructuras lingüísticas.

Así si se desea ejercitar la traslación matemática de la estructura lingüística "de" cuando ésta se encuentra entre dos números (que tan útil será posteriormente en el lenguaje algebraico) se puede recurrir a enunciados como:

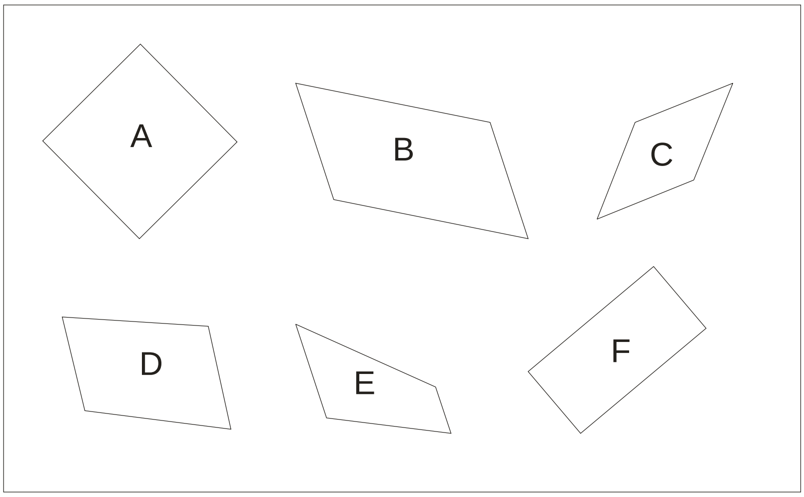
- *¿Qué cantidad es el triple "de" 20?*
- *¿Qué cantidad es el doble "de" ¾ de litro?*
- *¿Qué cantidad es los* $\frac{2}{3}$ *"de" 5 kilómetros?*
- *¿Qué cantidad es los* $\frac{3}{5}$ *"de"* $\frac{7}{2}$*?*
- *¿Qué cantidad es el 30% "de" 200€?*

Todos estos enunciados tienen la misma estructura lingüística y consecuentemente es oportuno que correspondan a la misma operación matemática.

Otro ejemplo, éste tomado del campo geométrico, podría ser:

Nombra, justificando la respuesta, los distintos tipos de cuadriláteros de la figura adjunta:

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 15 – FEBRERO DE 2009



5. CONCLUSIÓN

La metodología de la enseñanza de las matemáticas necesita tanto los problemas como los ejercicios. La escasa valoración y empleo, qué no se ha de decir de la carencia, de uno cualquiera de ellos produce parálisis y pérdida del vigor de la razón, del discurso y de la autoestima.

Autoría

- Nombre y Apellidos: Patricia Pérez Ortiz
- Centro, localidad, provincia: IES Torreblanca, Sevilla, Sevilla
- E-mail: patruki957@yahoo.es