ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 15 – FEBRERO DE 2009

"LÓGICA PROPOSICIONAL"

AUTORÍA **SILVIA BORREGO DEL PINO**
TEMÁTICA **MATEMÁTICAS. LÓGICA**
ETAPA **UNIVERSITARIA**

Resumen

La lógica forma parte de la filosofía, en la que se distinguen dos dimensiones, la dimensión teórica y la práctica, la lógica pertenece a la dimensión práctica, que se ocupa del conocimiento de la realidad.

La lógica es la ciencia que estudia los principios y métodos para distinguir un razonamiento correcto de otro incorrecto.

La lógica investiga la relación de consecuencia que se da entre una serie de premisas y la conclusión de un argumento correcto. Se dice que un argumento es correcto (válido) si su conclusión se sigue o es consecuencia de sus premisas; de otra forma es incorrecto.

La lógica proposicional es una rama de la lógica clásica que estudia las proposiciones o sentencias lógicas, sus posibles evaluaciones de verdad y en el caso ideal, su nivel absoluto de verdad.

Palabras clave

Lógica proposicional

Proposiciones

Conectores

Tablas de verdad

1. INTRODUCCIÓN

Para resolver multitud de problemas en la vida diaria y para sacar conclusiones o realizar demostraciones en la científica, aplicamos continuamente el razonamiento lógico.

El primer estudio sistemático del razonamiento lógico se encuentra en Aristóteles. En el "Organon", Aristóteles trata las reglas del razonamiento silogístico. La lógica aristotélica enuncia las fórmulas lógicas con palabras del lenguaje ordinario. Más tarde, se abstrajo del lenguaje ordinario, caracterizándose por unas reglas sintácticas diferenciadas y unas funciones semánticas especiales.

INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS
REVISTA DIGITAL

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 15 – FEBRERO DE 2009

Posteriormente, se impuso el uso de un lenguaje artificial en el que los signos y palabras estaban regidos por una sintaxis exacta y tenían semántica estrechamente delimitada y definida también exactamente.

Durante la Edad Media, los escolásticos trabajaron con este tipo de lógica, que sería posteriormente simplificada por matemáticos como Anauld, Leibnitz o Euler.

Ya en el siglo XIX, Boole y De Morgan hicieron aportaciones decisivas relacionadas con esta disciplina. George Boole creó un sistema de lógica matemática en su obra “” The Mathematical Analisis of Logic”. Boole aproximó la lógica en una nueva dirección reduciéndola a un álgebra simple, incorporando la lógica en las matemáticas. Agudizó la analogía entre los símbolos algebraicos y aquellos que representan formas lógicas. Su álgebra consiste en un método para resolver problemas de lógica que recurre solamente a los valores binarios 1 y 0 y a tres operadores: AND (y), OR (o) y NOT (no).

Tras la importante obra de Boole, Peano, Cantor y Hilbert hicieron diversas aportaciones que motivaron el interés por la lógica matemática de Russel y Whitehead, que entre 1910 y 1913 publicaron los “Principia Mathematica”, formalizando de este modo refinadas técnicas de la lógica matemática contemporánea. En su obra, intentaron trasladar las matemáticas al área de la filosofía lógica y dotarlas de un marco científico preciso. Russel y Whitehead muestran que la lógica tradicional, que se apoya en el Organon de Aristóteles, no es más que un simple fragmento de todo un conjunto y que, definiendo los números en términos de clases (noción eminentemente lógica), resulta posible deducir las matemáticas de la lógica formal de tal manera que entre las dos no hay solución de continuidad, sino todo un sistema.

Por último, hay que destacar las aportaciones de Kart Gödel a esta disciplina, demostrando la consistencia de la hipótesis del continuo de Cantor y enunciando el teorema que establece la existencia de enunciados y teoremas indecidibles en cualquier sistema lógico.

El tradicional desarrollo de la lógica enfatizaba su centro de interés en la forma de argumentar, mientras que la actual lógica matemática lo centra en un estudio combinatorio de los contenidos. Esto se aplica tanto a nivel sintáctico (por ejemplo, el envío de una cadena de símbolos perteneciente a un lenguaje formal a un programa compilador que lo convierte en una secuencia de instrucciones ejecutables por una máquina), como a un nivel semántico, construyendo modelos apropiados (teoría de modelos).

La lógica proposicional es una rama de la lógica clásica que estudia las proposiciones o sentencias lógicas, sus posibles evaluaciones de verdad y en el caso ideal, su nivel absoluto de verdad.

2. ÁLGEBRA DE BOOLE DE LAS PROPOSICIONES

2.1. Definiciones y operaciones

Comencemos en primer lugar definiendo los siguientes conceptos:

Término es cada parte constitutiva de una expresión, enunciado o discurso. Podemos clasificarlos en *categoremáticos*, que son aquellos que tienen significado propio e independiente, y en *sincategoremáticos*, que son aquellos que no tienen significado propio y se utilizan para modificar o enlazar términos categoremáticos.

Proposición lógica es toda agrupación de términos de la que se pueda afirmar si su contenido es cierto o falso. Podemos clasificarlas en *atómicas*, que son aquellas que no se pueden descomponer en partes que sean a su vez proposiciones, y carecen del término "no", y *moleculares*, si están formadas por proposiciones atómicas enlazadas o modificadas por determinados términos sincategoremáticos.

Las proposiciones atómicas se pueden sustituir por símbolos que suelen ser letras minúsculas comenzando por la p; p, q, r, s… Dichos símbolos reciben el nombre de *variables proposicionales.*

Conectores proposicionales son términos sincategoremáticos que se usan para modificar o enlazar proposiciones. Los más utilizados son:

Negación: representa la partícula lingüística *no* o cualquier otra partícula que incluya la idea de negación. Este conector cambia el valor de la verdad de la proposición que conecta.

Conjunción: Representa la partícula lingüística *y* o cualquier otra que indique la idea de unión, como *también*, *igualmente*, *pero*. Este conector da lugar a una proposición verdadera si las proposiciones que enlaza son verdaderas y falsa en los restantes casos.

Disyunción no exclusiva: Equivale a *y*/*o*, o sea, que incluye la verdad de los dos enunciados de la disyunción o bien sólo la de uno de los dos. Al componer dos proposiciones da lugar a una proposición falsa si ambas son falsas, y verdadera en los restantes casos.

Disyunción exclusiva: Expresa la idea que la verdad de un miembro es incompatible con la verdad del otro: o uno o el otro, pero no los dos. Al componer dos proposiciones da lugar a una proposición falsa si ambas tienen igual valoración y a una proposición verdadera en caso contrario. Se le llama también adición booleana.

Condicional: Representa las partículas lingüísticas *si… entonces...* o cualquiera otros que indiquen la idea de condición, como *cuando… entonces...*, *entonces* o una simple "coma". La partícula entonces o equivalente separa el antecedente del consecuente. Al componer dos proposiciones, llamadas antecedente y consecuente, da lugar a una proposición falsa si el antecedente es verdadero y el consecuente es falso, y a una proposición verdadera en los restantes casos.

Bicondicional: Representa las partículas lingüísticas *si y sólo si…* o cualquier otra que indique doble *condición*, como *equivale*, *cuando y sólo cuando*, *únicamente*. Se trata de una condición necesaria y suficiente. Al componer dos proposiciones da lugar a una proposición verdadera si ambas tienen la misma valoración y falsa en los restantes casos.

El conector negación se llama gonádico y los demás diádicos.

Los conectores proposicionales también se pueden sustituir por símbolos, que reciben el nombre de *signos conectivos o constantes lógicas*. Así,

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 15 – FEBRERO DE 2009

Negación: ¬
Conjunción: ∧
Disyunción no exclusiva: ∨

Disyunción exclusiva: _
Condicional: →
Bicondicional: ↔

La simbolización de las proposiciones moleculares se obtiene simbolizando las proposiciones atómicas que la forman y los conectores que las enlazan o modifican. Así, la formalización de "Si llueve, entonces la tierra se moja", con p simbolizando "Llueve" y q, "La tierra se moja", será **p → q**.

Se llama *fórmula lógica* a la expresión simbólica que sustituye a una proposición molecular. Se suelen utilizar para ellas las letras mayúsculas como P, Q, R…

Operaciones lógicas son transformaciones o enlaces de proposiciones con conectores. Los casos que se pueden presentar son:

-Composición de una proposición atómica con el conector gonádico no: **¬ p**

- Composición de dos proposiciones atómicas con los conectores diádicos: **p ∧ q, p ∨ q, p _ q, p → q, p ↔ q**.

-Composición de proposiciones con más de un conector, como por ejemplo: (**p → q**) ∨ **p.**

Llamamos *proposición contradictoria o contradicción* a una proposición compuesta que es falsa en todos los casos, cualquiera que sea el valor de verdad de sus proposiciones simples componentes. La proposición contradictoria es siempre verdadera por su forma lógica.

Llamamos *proposición tautológica o tautología* a una proposición compuesta que es verdadera en todos los casos, cualquiera que sea el valor de verdad de sus proposiciones simples componentes. La proposición tautológica es siempre verdadera por su forma lógica. La representamos por T.

Implicación lógica es una proposición condicional tautológica. Se expresa con el símbolo ⇒, que se lee implica.

Algunas de las tautologías más utilizadas e interesantes son:

T1	**¬ (p ∧ ¬ p)**	- Principio de no contradicción
T2	**p ∨ ¬ p**	- Principio del tercio excluso (tercero excluido)
T3	**p ⇒ p**	- Identidad
T4	**(p ∧ q) ⇒ p**	- Eliminación del conjuntor
T5	**(p ∧ q) ⇒ q**	- Eliminación del conjuntor
T6	**p ⇒ (p ∨ q)**	- Introducción del disyuntor

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 15 – FEBRERO DE 2009

T7	$q \Rightarrow (p \vee q)$	- Introducción del disyuntor
T8	$[(p \rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$	- Ley del modus ponens (o eliminación del implicador)
T9	$[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$	- Contrarrecíproco o modus tollens
T10	$\neg(\neg p) \Rightarrow p$	- Eliminación de la negación

Una *proposición indeterminada o contingente* es una proposición compuesta que es verdadera en algunos casos y falsa en otros, dependiendo del valor de verdad de sus proposiciones simples componentes.

Dos fórmulas lógicas P y Q y sus respectivas proposiciones son *lógicamente equivalentes* si y sólo si la bicondicional $\mathbf{P \leftrightarrow Q}$ es tautológica.

2.2. Álgebra de Boole de las proposiciones

Si F es el conjunto de todas las proposiciones se verifican las siguientes propiedades:

1. Idempotente:	$p \vee p = p$	$p \wedge p = p$
2. Asociativa:	$(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$	$(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$
3. Conmutativa:	$p \vee q = q \vee p$	$p \wedge q = q \wedge p$
4. Simplificativa:	$(p \vee q) \wedge p = p$	$(p \wedge q) \vee p = p$
5. Complementario:	$p \vee \neg p = T$	$p \wedge \neg p = K$
6. Distributiva:	$(p \vee q) \wedge r = (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$	$(p \wedge q) \vee r = (p \vee r) \wedge (q \vee r)$

de donde **(F, $\vee$, $\wedge$)** es un álgebra de Boole, llamada *álgebra de Boole de las proposiciones*.

Por supuesto, al ser un álgebra de Boole, se verifican también:

7. Elementos absorbentes:	$p \vee T = T$	$p \wedge K = K$
8. Elementos neutros:	$p \vee K = p$	$p \wedge T = T$
9. Leyes de De Morgan:	$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$
10. De involución:	$\neg(\neg p) = p$	

3. TABLAS DE VERDAD. PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES LÓGICAS

La tabla de valores de verdad, también conocida como *tabla de verdad*, es una herramienta desarrollada por Charles Peirce en los años 1880, siendo sin embargo más popular el formato que Ludwig Wittgenstein desarrolló en su *Tractatus logico-philosophicus*, publicado en 1918 por Bertrand Russell.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 15 – FEBRERO DE 2009

Se emplean en lógica para determinar los posibles valores de verdad de una expresión o proposición molecular. O si un esquema de inferencia, como argumento, es formalmente válido mostrando que, efectivamente, es una tautología.

Se suele simbolizar por V o por 1 si la proposición es verdadera y por F o por 0 si es falsa.

Considerando dos proposiciones A y B, cada una como un todo (sea como proposición atómica o molecular) y asimismo cada una con sus dos posibles valores de verdad V (Verdadero) y F (Falso), y considerando su relación "$" como variable de cualquier relación sintáctica posible que defina un conector, podrían suceder los casos siguientes:

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	B	A$B	A$B	A$B	A$B	A$B	A$B	A$B	A$B	A$B	A$B	A$B	A$B	A$B	A$B	A$B	A$B
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	F	F	F	F	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F
F	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F

Las dos primeras columnas de la tabla nos muestran los cuatro casos de combinación posibles según el valor de verdad de A y de B. Tenemos por tanto 4 líneas, y 16 columnas que representan todos los posibles valores que pueden darse según se defina un conector cualquiera.

Para cada conector definido con anterioridad tenemos una tabla de verdad. Así tenemos:

Negación (¬)

A	**¬ A**
V	F
F	V

Conjunción (∧)

A	***B***	**A ∧ B**
V	V	V

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 15 – FEBRERO DE 2009

V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disyunción (∨)

A	*B*	A ∨ B
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Disyunción exclusiva (_)

A	*B*	A _ B
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Condicional (→)

A	*B*	A → B

INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 15 – FEBRERO DE 2009

V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Bicondicional (↔, si y sólo si)

A	***B***	**A ↔ B**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Las tablas nos manifiestan los posibles valores de verdad de cualquier proposición molecular, así como el análisis de la misma en función de las proposiciones que la integran, encontrándonos con los siguientes casos, definidos anteriormente:

Verdad Indeterminada

Sea el caso: $A \wedge (B \vee C)$.

Su tabla de verdad se construye de la siguiente manera:

Ocho filas que responden a los casos posibles que pueden darse según el valor V o F de cada una de las proposiciones A, B, C.

Una columna en la que se establecen los valores de $B \vee C$ según la definición del disyuntor.

Una columna en la que se establecen los valores de la conjunción de la columna en la que están los valores de A con valores de la columna $B \vee C$, aplicando la definición del conjuntor a los valores, que representarán los valores de la proposición completa $A \wedge (B \vee C)$.

A	**B**	**C**	**$B \vee C$**	**$A \wedge (B \vee C)$**

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 15 – FEBRERO DE 2009

V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	F
F	V	F	V	F
F	F	V	V	F
F	F	F	F	F

Donde podemos comprobar cuándo y por qué la proposición A ∧ (B ∨ C) es V y cuándo es F

Contradicción

Sea el caso: [(A ∧ B) ∧ ¬(A ∨ B)] ∧ C

Aplicamos la definición de conjuntor a los valores de A y B. Después aplicamos la definición de disyuntor a los valores de A y B. Aplicamos en la columna siguiente el negador a los valores de la columna anterior. Aplicamos el conjuntor a los valores de la columna (A ∧ B) con los de la columna ¬(A ∨ B). Por último aplicamos el conjuntor a los valores de la columna de C con la columna última cuyo resultado nos da los valores de [(A ∧ B) ∧¬(A ∨ B)]/\C

A	**B**	**C**	**A ∧ B**	**A ∨ B**	**¬(A ∨ B)**	**(A ∧ B) ∧ ¬(A ∨ B)**	**[(A ∧ B) ∧ ¬(A ∨ B)] ∧ C**
V	V	V	V	V	F	F	F
V	V	F	V	V	F	F	F
V	F	V	F	V	F	F	F
V	F	F	F	V	F	F	F
F	V	V	F	V	F	F	F
F	V	F	F	V	F	F	F
F	F	V	F	F	V	F	F

F	F	F	F	F	V	F	F

Tautologías

Sea el caso: $[(A\to B)\wedge(B\to C)]\to(A\to C)$

Siguiendo la mecánica algorítmica de la tabla anterior construiremos su tabla de verdad:

A	**B**	**C**	**A→B**	**B→C**	**(A→B) ∧ (B→C)**	**(A→C)**	**[(A→B) ∧ (B→C)] → (A→C)**
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Por otro lado, a partir de los conectores negación y disyunción no exclusiva podemos definir:

- Conector conjunción: $\mathbf{p \wedge q = \neg(\neg p \vee \neg q)}$
- Conector condicional: $\mathbf{p \to q = \neg p \vee q}$
- Conector disyunción exclusiva: $\mathbf{p \_ q = \neg[\neg(p\vee q) \vee \neg(\neg p \vee \neg q)]}$
- Conector bicondicional: $\mathbf{p \leftrightarrow q = \neg[\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p)]}$

4. APLICACIONES AL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

4.1. Formalizaciones de la teoría matemática

En Matemáticas hay tres procesos fundamentales: construir objetos matemáticos (modelos abstractos de objetos físicos más o menos complicados o visibles), formar relaciones entre objetos (aserciones que pueden enunciarse relativas a esos objetos) y demostrar que algunas de estas

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 15 – FEBRERO DE 2009

relaciones son verdaderas (sucesión de silogismos por los que a partir de un pequeño número de axiomas puede deducirse de manera lógica una relación dada).

Una teoría matemática es un conjunto de proposiciones que se siguen según un esquema de deducción lógica a partir de unas afirmaciones que admitimos sin demostración.

En primer lugar han de introducirse unos conceptos primitivos no susceptibles de definición. Junto a ellos se establecen unos postulados o axiomas, proposiciones primeras, que se aceptan sin demostración y que enuncian propiedades de los conceptos primeros. En una misma disciplina pueden darse diversos sistemas de axiomas equivalentes, debido a la arbitrariedad de elección, por lo que no tiene sentido preguntarse si una proposición puede o no demostrarse si no se especifica el sistema de axiomas de la teoría a la que se refiere. Un sistema de axiomas ha de ser compatible (sin encerrar contradicción) e independiente (ninguno de los axiomas, ni una parte de ellos, puede ser deducido de los demás).

Podemos definir *demostración, prueba, razonamiento o deducción* como el proceso o paso lógico por el cual de las premisas se llega a la conclusión. La demostración se dice válida cuando las premisas y la conclusión son verdaderas. En caso contrario se dice que es una falacia.

Términos primitivos son los que se introducen con sólo enunciarse, es decir, sin definición. *Términos definidos* son los que se introducen dando sus propiedades características.

Un *axioma o postulado* es una proposición cuya veracidad se establece por convenio.

Un *teorema* es una proposición en la que la conclusión o tesis (T) resulta como consecuencia lógica de las premisas o hipótesis (H). El paso de H a T es la demostración.

En Matemáticas se dan tres tipos fundamentales de demostraciones:

Demostraciones directas. Son las más frecuentes. Consisten en razonamientos por los cuales se puede pasar de la hipótesis a la tesis mediante la consideración de definiciones, axiomas y proposiciones anteriormente establecidas, combinadas según las reglas de inferencia de los silogismos. Los teoremas que así se demuestran se llaman directos. Si la demostración es válida se dice que son ciertos y que: H es condición suficiente para que se cumpla T.

T es condición necesaria para que se cumpla H.

También se escribe $H \Rightarrow T$.

Un teorema se dice recíproco de otro dado si sus hipótesis H_1 y tesis T_1 coinciden con las tesis T e hipótesis H del dado, es decir, $H_1 = T$ y $T_1 = H$. Si la demostración del teorema recíproco es válida se dice que es cierto y que:

H es condición necesaria para que se cumpla T.

T es condición suficiente para que se cumpla H.

Es decir, $T \Rightarrow H$.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 15 – FEBRERO DE 2009

La certeza de un teorema no implica la de su recíproco, pero en caso de ser ciertos los dos se puede poner que:

H (o T) es condición necesaria y suficiente de T (o H), es decir: $H \Leftrightarrow T$ (o $T \Leftrightarrow H$).

Un teorema se dice contrario de otro dado si tiene por hipótesis (H_2) y tesis (T_2) la negación de las hipótesis del dado. O sea, $H_2 = \neg H$, $T_2 = \neg T$.

Un teorema se dice contrarrecíproco de otro dado si tiene por hipótesis (H_3) y tesis (T_3) la negación de las tesis e hipótesis del primero. O sea, $H_3 = \neg T$, $T_3 = \neg H$.

Los teoremas contrario y recíproco son mutuamente contrarrecíprocos.

Si construimos las respectivas tablas de verdad observaremos que:

$$\mathbf{(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)}$$

$$\mathbf{(q \rightarrow p) \Leftrightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)}$$

Es decir, podemos concluir que los teoremas contrarrecíprocos son equivalentes, es decir, son ciertos o falsos simultáneamente.

Demostraciones indirectas o por reducción al absurdo. Se fundan precisamente en la equivalencia de dos teoremas contrarrecíprocos y en las reglas de inferencia. Si se trata de demostrar un teorema de la forma $H \Rightarrow T$, se parte de suponer H y $\neg$ T, y se trata de llegar a una contradicción, es decir una proposición de la forma $(A \wedge \neg A)$. Esto permite inferir $\neg(\neg T)$ y de ahí el teorema.

Demostración por recurrencia o inducción completa. Se fundan en el siguiente principio lógico, llamado de inducción completa o de recurrencia que consiste en:

a) Comprobar que una ley es cierta para un primer valor de n.

b) Demostrar que si es cierta para un valor cualquiera de n, lo es también para el siguiente, n + 1.

4.2. Cuantificadores y funciones proposicionales

Una *función proposicional* de una variable es una expresión p(x) que se convierte en una proposición cuando se sustituye x por un valor particular arbitrario, elemento del espacio considerado.

La operación E.

El conjunto de valores de x para los que p(x) es una proposición verdadera se designa por el símbolo $E_x p(x)$ o por $\{x|p(x)\}$.

Por definición de operación E, la condición necesaria y suficiente para que el elemento pertenezca al conjunto $E_x p(x)$ es que p(x) sea verdadera, o sea:

$$\forall a,\ a \in E_x p(x) \Leftrightarrow p(a)$$

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 15 – FEBRERO DE 2009

Propiedades

1. $E_x[p(x) \wedge q(x)] = E_xp(x) \cap E_xq(x)$
2. $E_x[p(x) \vee q(x)] = E_xp(x) \cup E_xq(x)$
3. $E_x[p(x) \wedge \neg\ q(x)] = E_xp(x) - E_xq(x)$
4. $E_x(\neg\ p(x)) = (E_xp(x))'$

Consideremos ahora las dos operaciones siguientes entre funciones proposicionales: $(\exists x)p(x)$, que se lee "existe algún x que satisface p(x)", y $(\forall x)p(x)$, que se lee "todo x satisface p(x)". Estas operaciones transforman las funciones proposicionales en proposiciones. Los símbolos de estas operaciones se llaman cuantificadores existencial y universal, respectivamente.

Propiedades

1. $[(\exists x)p(x) \vee (\exists x)q(x)] \Leftrightarrow (\exists x)\ [p(x) \vee q(x)]$
2. $(\exists x)\ [p(x) \wedge q(x)] \Leftrightarrow [(\exists x)p(x) \wedge (\exists x)q(x)]$
3. $[(\forall x)p(x) \wedge (\forall x)q(x)] \Leftrightarrow (\forall x)\ [p(x) \wedge q(x)]$
4. $[(\forall x)p(x) \vee (\forall x)q(x)] \Leftrightarrow (\forall x)\ [p(x) \vee q(x)]$
5. $(\forall x)p(x) \Rightarrow (\exists x)p(x)$
6. $\neg\ [(\forall x)p(x)] \Leftrightarrow (\exists x)(\neg\ p(x))$
7. $\neg\ [(\exists x)p(x)] \Leftrightarrow (\forall x)(\neg\ p(x))$

Una *función proposicional de dos variables* sobre los espacios X e Y es lo mismo que una función proposicional de una variable sobre el producto cartesiano XxY.

Sea p(x,y) una función proposicional de dos variables. Entonces $\exists y\ p(x,y)$ y $\forall y\ p(x,y)$ serán funciones de una sola variable, en este caso la x.

Propiedades

1. $(\exists x)(\exists y)p(x,y) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)p(x,y)$
2. $(\forall x)(\forall y)p(x,y) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)p(x,y)$
3. $(\exists x)(\forall y)p(x,y) \Leftrightarrow (\forall y)(\exists x)p(x,y)$

En el caso particular de coincidir los espacios X e Y, resulta:

4. $(\forall x,y)p(x,y) \Rightarrow (\forall x)p(x,x) \Rightarrow (\exists x)p(x,x) \Rightarrow (\exists x,y)p(x,y)$

Los anteriores razonamientos pueden generalizarse al caso en que haya más de dos variables, hablándose análogamente de funciones proposicionales de n variables definidas sobre uno o varios espacios.

REVISTA INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS DIGITAL

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 15 – FEBRERO DE 2009

5. CONCLUSIÓN

Cuando se formulan sistemas o modelos matemáticos se pretende realizar una representación abstracta de determinados fenómenos reales. El desarrollo formal matemático comienza por la identificación de determinados conceptos con los fenómenos o situaciones particulares que se pretenden estudiar. Partiendo de esos conceptos o nociones iniciales, se enuncian un sistema de axiomas relacionados con ellos. Dichos axiomas son enunciados admitidos como ciertos y que no pueden demostrarse dentro del sistema. A partir del sistema de axiomas pueden deducirse diferentes teoremas, consecuencias lógicas del sistema de axiomas.

La lógica matemática eleva a grado de máximo la abstracción matemática. De este modo, estudia los sistemas lógicos y proposicionales sin tener en cuenta su posible representación de fenómenos de naturaleza real.

Es interesante reflejar que la última "Revolución Lógica" incorpora la fusión entre matemáticas y computación. Las computadoras tienden a explorar datos inteligentemente, transfiriendo información de las bases de datos a las bases de conocimiento interconectadas a través de la Red a escala infinitesimal.

La lógica evoluciona pues como un gen hacia la culminación del conocimiento libre que nace del rigor formal de la Matemática griega, emerge renovadamente de etapas de persecución tan oscuras como la Edad Media y otros intentos más recientes hasta el intercambio constante y continuo de datos en la moderna era de estructura de redes que Internet proporciona a modo neuronal a la Humanidad.

6. BIBLIOGRAFÍA

Burgos, A. (1983). *Iniciación a la lógica matemática.* Madrid: Selecciones científicas.

Ferrater Mora, J. (1975). *Lógica matemática*. México: Fondo de cultura económica.

Garrido, M. (1998). *Lógica simbólica.* Madrid: Tecnos.

Grimaldi, R. (1998). *Matemática discreta y combinatoria*. México: Addison- Wesley.

Lipschutz, S. (1985). *Teoría de conjuntos y temas afines.* México: Mc. Graw Hill. Serie de Compendios Schaum

Autoría

- Nombre y Apellidos: SILVIA BORREGO DEL PINO
- Centro, localidad, provincia: I.E.S. ÁNGEL DE SAAVEDRA. CÓRDOBA. CÓRDOBA
- E-mail: DEPIS79@HOTMAIL.COM