REVISTA DIGITAL
INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 16 – MARZO DE 2009

"LOS TRES PROBLEMAS CLÁSICOS DE LA GEOMETRÍA GRIEGA"

AUTORÍA **PATRICIA PÉREZ ORTIZ**
TEMÁTICA **HISTORIA DE LA MATEMÁTICA**
ETAPA **ESO, BACHILLERATO…**

Resumen

El problema de las magnitudes inconmensurables desplazó en la Grecia Clásica el centro de la matemática desde la aritmética a la geometría. Con este artículo se pretende divulgar los llamados "tres problemas clásicos de la geometría griega" que como tales fueron heredados por los matemáticos de los siglos posteriores. Y que solamente en el siglo XIX, desde una óptica completamente distinta, serían solucionados.

Palabras clave

Cuadratura, duplicación, trisección.

1. INTRODUCCIÓN

La tradición ha considerado que los tres principales problemas geométricos legados por la matemática griega a los siglos posteriores eran:

- La duplicación del cubo
- La cuadratura del círculo
- La trisección del ángulo.

Aunque la misma tradición sostenía que la solución de estos problemas debía realizarse de forma constructiva con regla no graduada y compás, hay historiadores de la matemática que opinan que esta restricción carece de base argumental. Y en su favor mencionan algunas curvas conocidas por los matemáticos griegos y que al parecer tendrían su origen en los intentos de solución de estos problemas.

REVISTA DIGITAL INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 16 – MARZO DE 2009

2. LA DUPLICACIÓN DEL CUBO

¿Cómo puede construirse, con regla y compás, un cubo cuyo volumen sea el doble que otro?

El problema quedaría resuelto mediante la construcción de su arista con los instrumentos antes mencionados. Resulta obvio que ésta no podría ser el doble pues en dicho caso el volumen del cubo se habría multiplicado por 8.

A la sombra del problema de la duplicación del cubo surgirían en la Grecia Clásica invenciones y leyendas.

Así cuenta **Theon de Smirna** que los atenienses enviaron una delegación al oráculo de Apolo en Delos para ver la manera de poner remedio a la epidemia que diezmaba su ciudad y que

cuando el dios anunció a la gente de Delos por medio del oráculo que para acabar con la plaga debían construir un altar de tamaño doble del que existía, cayeron en gran perplejidad, tratando de encontrar la forma en que un sólido podía ser duplicado, yendo a preguntar a Platón sobre el problema. Él les dijo que el dios había dado esta respuesta no porque quisiera un altar de doble tamaño, sino porque él deseaba, al presentar este problema ante ellos, reprochar a los griegos su negligencia con las matemáticas y su menosprecio de la geometría.

La duplicación del cuadrado es el problema en el plano análogo al de la duplicación del cubo en el espacio. Sin embargo aquél es de fácil solución.

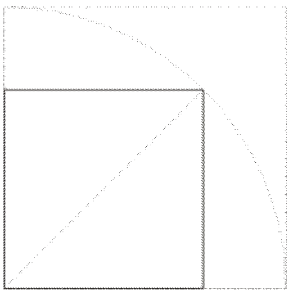

Figura 1: Duplicación del cuadrado

Basta con construir un nuevo cuadrado cuyo lado sea la diagonal del primitivo. Si el lado de éste se designa por *L,* su área es $S = L^2$. Su diagonal mide $L\sqrt{2}$ y el área del cuadrado a construir es $S = \left(L\sqrt{2}\right)^2 = 2L^2$. La duplicación del área del cuadrado es equivalente a la representación del número $\sqrt{2}$, solución de la ecuación $x^2 = 2$. La duplicación del cubo equivaldría, pues, a la representación del número $\sqrt[3]{2}$, solución de la ecuación $x^3 = 2$.

Mediante la utilización de la regla y el compás los geómetras griegos trazaron paralelas a una recta dada, construyeron rectas perpendiculares a otra desde un punto, idearon un procedimiento para representar las raíces cuadradas de cualesquiera números enteros

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 16 – MARZO DE 2009

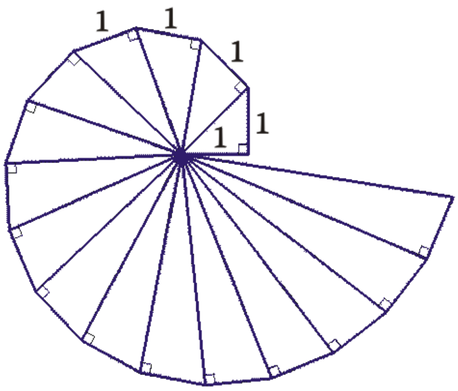

Figura 2: Espiral de Teodoro de Cirene

representaron otros números como “el número de oro”, o razón áurea, construyeron polígonos regulares…. Sin embargo con los mencionados instrumentos no lograron duplicar el volumen del cubo o construir el número $\sqrt[3]{2}$.

Fue preciso recurrir a nuevas curvas, como la *cisoide de Diocles*.

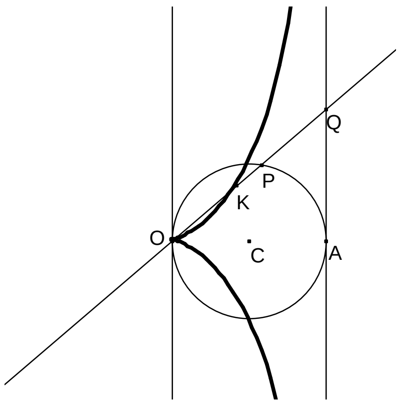

Figura 3: Cisoide de Diocles

Modernamente la construcción de ciertos números, como la raíz cúbica de 2, a partir de curvas como la cisoide reviste en general mucho menos interés teórico que el que podía tener en una época en que la construcción de curvas se realizaba simplemente mediante intersección de superficies (modo como los griegos definieron las cónicas) o mediante simples movimientos como el de rotación y traslación. El álgebra, desconocida para los griegos de la época heroica, y la asociación de las operaciones con funciones y la representación de éstas en un sistema cartesiano de referencia han sacado del centro de la escena los métodos geométricos de construcción y de representación de los números. ¿Por qué recurrir a la cisoide de Diocles cuando puede simplemente recurrirse a la función raíz cúbica y a la curva por ella generada?

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 16 – MARZO DE 2009

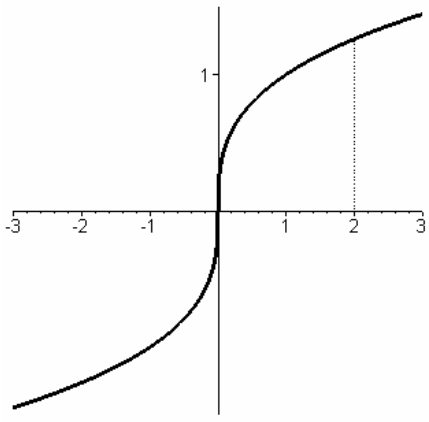

Figura 4: Gráfica de la función raíz cúbica

Hasta el siglo XIX no lograron los matemáticos demostrar la imposibilidad de la duplicación del cubo con los únicos instrumentos de la regla no graduada y el compás. Y para ello tuvo que trasladarse el problema del campo geométrico al algebraico y asociar las rectas con ecuaciones lineales y las circunferencias con ecuaciones de segundo grado. Cualquier nueva construcción que utilizara los instrumentos clásicos conduciría inevitablemente a ampliaciones en el cuerpo de los números generadas por los datos iniciales más sucesiones de raíces cuadradas de éstos. No es posible, pues, con los únicos instrumentos de la regla no graduada y compás, a partir de la unidad construir la $\sqrt[3]{2}$, raíz cúbica de 2, ni por tanto duplicar el volumen de un cubo.

3. LA CUADRATURA DEL CÍRCULO

¿Puede construirse un cuadrado con regla y compás un cuadrado de la misma área que un círculo?

El problema de la cuadratura del círculo está en buena medida relacionado con el anterior. Ambos son problemas concretos, que versan sobre figuras geométricas particulares, el primero sobre el cubo, el segundo sobre el círculo. Mientras que la duplicación del cubo intenta obtener de forma geométrica la medida de un segmento que involucra numéricamente a la raíz cúbica, la cuadratura del círculo trata de obtener de la misma manera la superficie de un círculo. Y ello de la única forma posible en la cultura matemática griega: construyendo un cuadrado de la misma área (técnica de las cuadraturas). Aún no había sido descubierta el álgebra y no tenían sentido las fórmulas magistrales que se aprenden en la escuela. Tampoco disponía la cultura griega del sistema de numeración decimal y de los métodos de cálculo inherentes al mismo.

Los griegos lograron cuadrar las figuras más simples, lo que permitía calcular su área transformándolas en otras figuras de área conocida y en último término en cuadrados.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 16 – MARZO DE 2009

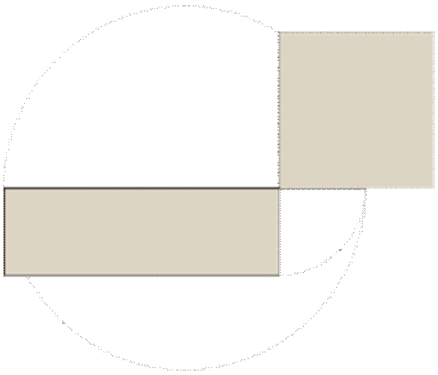

Figura 5: cuadratura del rectángulo

La cuadratura anterior utiliza varios teoremas geométricos:

- Los ángulos inscritos en una circunferencia y que abarcan una semicircunferencia son rectos.
- La altura (*h*) sobre la hipotenusa en un triángulo rectángulo es media proporcional de los segmentos en que aquélla la divide (a y b).

Por ende $h^2 = ab$, siendo *a* y *b* también los lados del rectángulo. Y el área del cuadrado de lado *h* es igual al área del rectángulo de lados *a* y *b*.

La figura que sigue describe la cuadratura del triángulo y a partir del éste, por simple descomposición en triángulos, se podrían cuadrar las figuras poligonales

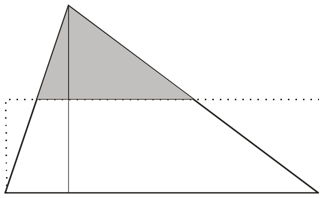

Figura 6: cuadratura del triángulo

Se cree que la primera figura no poligonal que logró cuadrar la matemática griega fue la lúnula de Hipócrates.

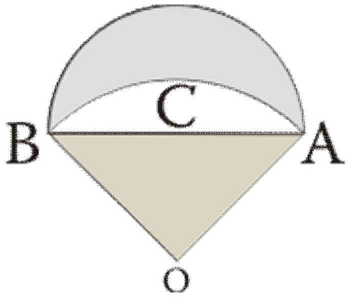

Figura 8: Lúnula de Hipócrates

REVISTA DIGITAL INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 16 – MARZO DE 2009

La lúnula de Hipócrates está limitada por una semicircunferencia de centro C, punto medio del segmento AB, y de un cuadrante de circunferencia de centro O y radio OA, mitad de la diagonal del cuadrado de lado AB. Es fácil comprobar que el área del semicírculo de diámetro AB coincide con el área del cuadrante OAB y en consecuencia el área de la lúnula de Hipócrates coincide con la del triángulo isósceles OAB.

Nada tiene de extraño que los matemáticos griegos ante el éxito de la cuadratura de la lúnula de Hipócrates buscaran con ahínco la cuadratura de la principal figura curva, el círculo, símbolo por excelencia de la regularidad, perfección y belleza.

Pero la cuadratura del círculo escondía en su interior un demonio más esquivo que el que se escondía en la duplicación del cubo. En lenguaje numérico este último escondía el número raíz cúbica de 2, solución de la ecuación $x^3 - 2 = 0$. Mientras que tras la cuadratura del círculo se ocultaba el número π, el cual no es posible definir a través de las operaciones elementales, del álgebra. No existe ninguna ecuación con coeficientes racionales que tenga entre sus soluciones al número π,

La raíz cúbica de 2 puede definirse como aquel número que al elevarlo al cubo se obtiene el número 2. No existe ninguna definición parecida ni de lejos para el número π. Los matemáticos han creado un nombre especial para este tipo de números. Los llaman números *transcendentes* o no algebraicos. Si ya era imposible duplicar un cubo con la regla no graduada y el compás, ¡cuánto más lo sería cuadrar el círculo! Lindemann en 1880, siglo XIX, demostraría que el número π era un número transcendente y en consecuencia el círculo no podía ser cuadrado recurriendo a los instrumentos clásicos de la regla y el compás.

4. LA TRISECCIÓN DE CUALQUIER ÁNGULO

¿Puede dividirse con regla y compás un ángulo en tres partes iguales?

La trisección de los segmentos, incluso su división en n partes iguales, había sido realizada por los matemáticos griegos a partir del teorema de Tales.

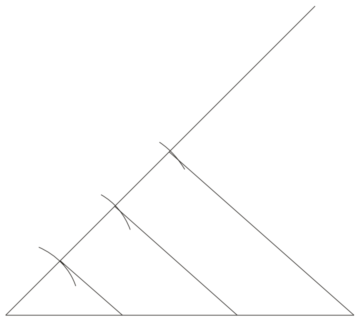

Figura 9: Trisección de un segmento

Ciertamente es conocida la forma de biseccionar un ángulo, como puede verse en la secuencia de viñetas.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 16 – MARZO DE 2009

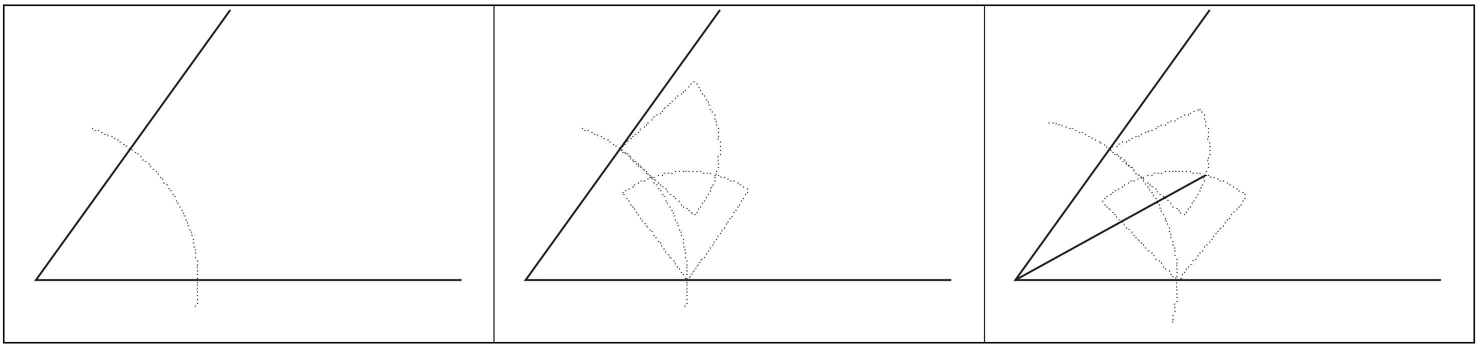

Figura 10: Construcción de la bisectriz

También es posible dividir en tres partes iguales determinados ángulos como 90º. Bastaría con construir a partir de un segmento AB un triángulo equilátero, para a continuación trazar una recta perpendicular a AB.

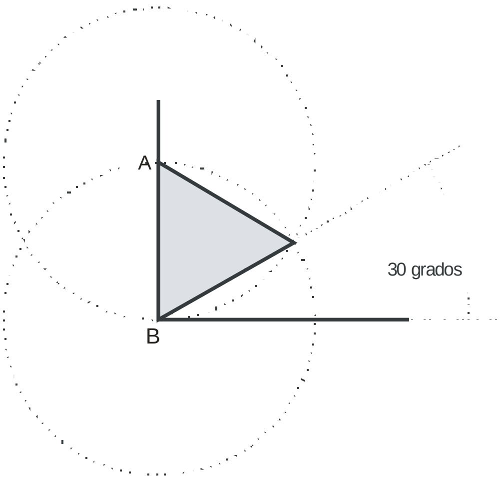

Figura 10: trisección del ángulo recto

Incluso ángulos como 108º pueden ser divididos en tres partes iguales al ser el ángulo interior de un pentágono regular, cuyas diagonales permiten trisecarlo fácilmente.

Pero los matemáticos griegos buscaban un método general que de forma similar a como ocurría con la bisección permitiera dividir un ángulo en tres partes iguales.

Para ello recurrieron a curvas, como la cuadratriz de Hipias.

INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS
REVISTA DIGITAL

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 16 – MARZO DE 2009

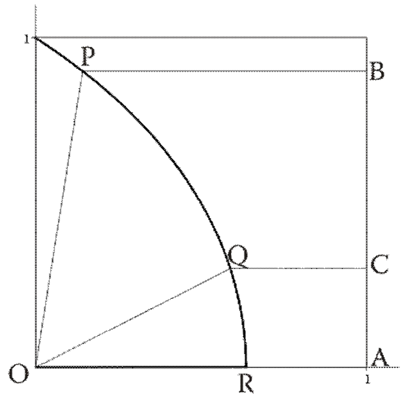

Figura 11: Cuadratriz de Hipias

Su construcción se atribuye a Hipias de Ellis (460-400 a.C). Es la primera curva, aparte de las rectas y circunferencias, de la que existe mención en la época clásica. Parece que fue conocida antes que las cónicas. Se trata de una curva mecánica, obtenida como lugar de intersección de una recta horizontal que se mueve a velocidad constante en dirección vertical y otra que gira con velocidad angular constante, siendo ambas rectas perpendiculares en el momento inicial y coincidentes en el final.

La cuadratriz de Hipias, llamada así porque generalmente se construye a partir de un cuadrado, permite dividir un ángulo ORP en tres partes iguales, trasladando horizontalmente el punto P de intersección del ángulo con la cuadratriz para obtener el punto B. La división del segmento AB en tres partes iguales y la traslación del punto C de nuevo horizontalmente a la cuadratriz permitían obtener el ángulo ORQ, tercera parte del ángulo original. La misma curva puede utilizarse de forma análoga para dividir un ángulo en cualquier número de partes iguales.

Arquímedes dedicó parte de su tiempo, como no podía ser de otra manera, al problema de la trisección y diseñó varios métodos para tal fin. Uno de ellos se basa en la espiral que lleva su nombre y cuya ecuación en coordenadas polares es $\rho = k\theta$. Dicha ecuación hace coincidir la coordenada radial con la angular salvo constantes, de forma que para trisecar un ángulo en tres partes iguales bastaría con considerar el correlato radial, dividir éste en tres partes iguales y a continuación buscar el ángulo correspondiente.

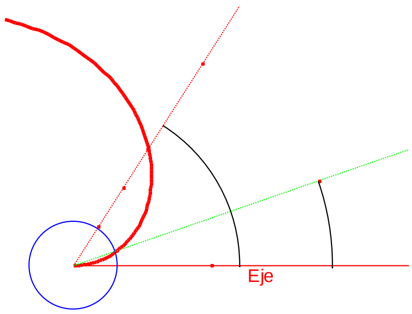

Figura 12: Uso de la espiral de Arquímedes para triseccionar un ángulo

Arquímedes también construiría el método que a continuación se describe:

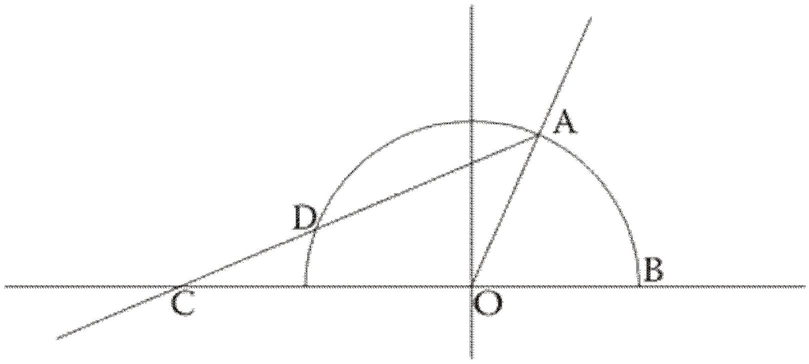

Figura 13: Otro método de Arquímedes

Para dividir en tres partes iguales el ángulo BOA bastaría con trazar por A una recta que corte al eje OB y a la circunferencia en los puntos C y D, de forma que la distancia CD coincida con el radio de la circunferencia. El ángulo OCD sería la tercera parte del ángulo inicial.

La determinación de tales puntos D condujo a nuevas curvas llamadas *concoides de Nicomedes* (280-210 a.C.).

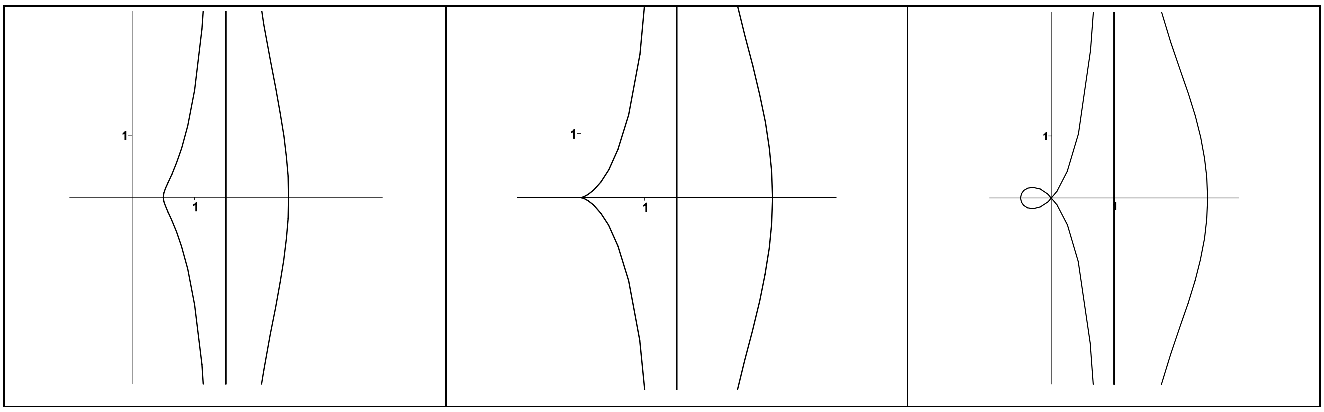

Figura 15: Distintas concoides de Nicomedes

La demostración de la imposibilidad de la trisección con regla y compás tiene similitudes con la demostración de la imposibilidad de la duplicación del cubo. Al igual que en éste en aquél el problema se traslada al campo algebraico. Por ejemplo no es posible construir un ángulo de 20º, a partir de uno de 60º. La abscisa o coseno del ángulo 20º debería satisfacer en virtud de las fórmulas de la trigonometría la ecuación $4x^3 - 3x = \frac{1}{2}$. Y ninguna raíz de esta ecuación podría generarse a partir de ampliaciones de los números racionales mediante raíces cuadradas. Y en consecuencia el problema de

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 16 – MARZO DE 2009

la trisección del ángulo no puede admitir una solución genérica mediante los instrumentos clásicos de la regla y el compás.

5. BIBLIOGRAFÍA

http://divulgamat.ehu.es/weborriak/TestuakOnLine/98-99/PG98-99-fernandez.pdf

www.revistasuma.es/index.php?option=com_docman&task=doc_details&gid=89&Itemid=33

www.pedagogica.edu.co/proyectos/geometria/docs/XI/**tres_problemas_clasicos_campos**.**PDF**

Autoría

- Nombre y Apellidos: Patricia Pérez Ortiz
- Centro, localidad, provincia: IES Torreblanca, Sevilla, Sevilla
- E-mail: patruki957@yahoo.es