REVISTA DIGITAL INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 16 – MARZO DE 2009

"APLICACIONES DE LAS FUNCIONES CIRCULARES"

AUTORÍA **SILVIA BORREGO DEL PINO**
TEMÁTICA **ANÁLISIS, FÍSICA**
ETAPA **UNIVERSITARIA, POST-UNIVERSITARIA**

Resumen

En la naturaleza hay muchos fenómenos que se repiten periódicamente. Basta pensar en el movimiento, de un péndulo, el movimiento planetario, las fases lunares, la subida y bajada de la marea, … hay otros muchos fenómenos no evidentes cuya evolución se rige mediante funciones periódicas, como la actividad eléctrica del cerebro, la corriente alterna, las ondas electromagnéticas…

Veremos a continuación algunas de estas aplicaciones de las funciones circulares.

Palabras clave

Funciones circulares.

Aplicaciones de las mismas.

1. INTRODUCCIÓN

Uno de los movimientos más importantes observados en la naturaleza es el movimiento oscilatorio (o vibratorio). Una partícula oscila cuando se mueve periódicamente con respecto a la posición de equilibrio. El movimiento de un péndulo es oscilatorio. Un cuerpo en el extremo de un resorte estirado, una vez que se suelta, comienza a oscilar. Los átomos de un sólido están vibrando.

De todos los movimientos oscilatorios, el más importante es el movimiento armónico simple (MAS), debido a que, además de ser el movimiento más simple de describir matemáticamente, constituye una aproximación muy cercana de muchas oscilaciones encontradas en la naturaleza.

Las funciones circulares (o trigonométricas) son básicas para el estudio de las funciones periódicas y para este tipo de movimientos. Estos se describen mediante funciones seno y coseno actuando sobre la variable tiempo. La rama matemática que estudia las funciones periódicas es el análisis armónico.

REVISTA DIGITAL INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 16 – MARZO DE 2009

Además, veremos otras aplicaciones importantes de este tipo de funciones como son la corriente alterna, las leyes de la reflexión y de la refracción y la acción de un campo magnético uniforme sobre una carga móvil.

2. DEFINCIÓN DE LAS FUNCIONES CIRCULARES

En Análisis se introducen las funciones circulares como sigue:

sen: $\Re \to \Re$; $\qquad x \to sen\ x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$

cos: $\Re \to \Re$; $\qquad x \to \cos\ x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

El resto de las funciones trigonométricas circulares se definen usando el seno y el coseno:

$$tg\ x = \frac{sen\, x}{\cos x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \cot g\ x = \frac{\cos x}{sen\, x} \qquad \cos ec\ x = \frac{1}{sen\, x}$$

3. APLICACIONES DE LAS FUNCIONES CIRCULARES

Dada la gran aplicación que tienen las funciones circulares en otras áreas y disciplinas, y la frecuencia con que lo hacen, reseñaré a continuación algunas de las más representativas situaciones reales donde éstas aparecen.

3.1. Cinemática del movimiento armónico simple

Por definición, decimos que una partícula que se mueve a lo largo del eje de las X sigue un movimiento armónico simple cuando su desplazamiento x respecto al origen del sistema de coordenadas está dado en función del tiempo por la relación

$$x = A\, sen(\omega t + \alpha)$$

La cantidad $\omega t + \alpha$ se denomina la fase, y por ello, α es la fase inicial; esto es, su valor cuando t = 0. Aunque hemos definido el movimiento armónico simple en función de una expresión senoidal, puede igualmente expresarse en función de una expresión cosenoidal, el único cambio sería una diferencia inicial de fase de $\frac{\pi}{2}$. Como la función seno (o coseno) varía entre – 1 y +1, el desplazamiento de la partícula varía entre x = – A y x = + A. El desplazamiento máximo a partir del origen, A, se define como la amplitud del movimiento armónico simple. La función seno se repite cada vez que el ángulo aumenta en 2π. Por consiguiente, el desplazamiento de la partícula se repite después de un intervalo de tiempo

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 16 – MARZO DE 2009

de $\frac{2\pi}{\omega}$. Luego el movimiento armónico simple es periódico, y su período es $P=\frac{2\pi}{\omega}$. La frecuencia υ de un movimiento armónico simple es igual al número de oscilaciones completas por unidad de tiempo; así $\nu=\frac{1}{P}$. La cantidad ω, denominada frecuencia angular de la partícula oscilante, está relacionada con la frecuencia de la forma:

$$\omega=\frac{2\pi}{P}=2\pi\nu$$

La velocidad de la partícula es:

$$v=\frac{dx}{dt}=\omega A\cos(\omega t+\alpha)$$

Y la aceleración:

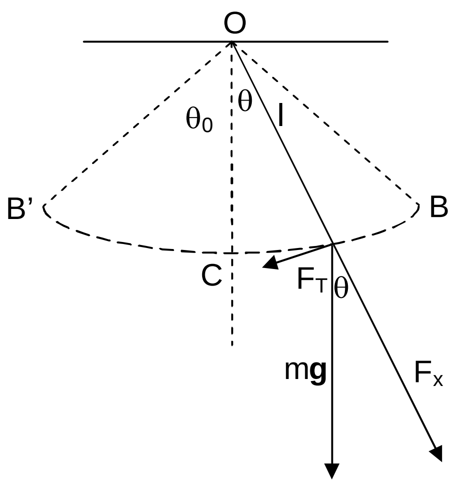
$$a=\frac{dv}{dt}=-\omega^2 A sen(\omega t+\alpha)=-\omega^2 x$$

La cual indica que en el movimiento armónico simple la aceleración es siempre proporcional y opuesta al desplazamiento.

3.1.1. Péndulo simple

Un ejemplo de movimiento armónico simple es el movimiento de un péndulo. Un péndulo simple se define como una partícula de masa m suspendida del punto O por una cuerda de longitud l y de masa despreciable. Si la partícula se lleva a la posición B de modo que la cuerda haga un ángulo θ_0 con la vertical OC, y luego se suelta, el péndulo oscilará entre B y la posición simétrica B'.

Para determinar la naturaleza de las oscilaciones, debemos escribir la ecuación de movimiento de la partícula. La partícula se mueve en un arco de círculo de radio l = OA. Las fuerzas que actúan sobre la partícula son su peso m**g** y la tensión **T** a lo largo de la cuerda.



INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS
REVISTA DIGITAL

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 16 – MARZO DE 2009

De la figura, se ve que la componente tangencial de la fuerza es

$$F_T = -mg\, sen\theta ,$$

donde el signo menos se debe a que se opone al desplazamiento s = CA. La ecuación del movimiento tangencial es $F_T = m a_T$ y, como la partícula se mueve a lo largo de un círculo de radio l, podemos usar la ecuación $a_T = R\frac{d^2\theta}{dt^2}$, reemplazando R por l, para expresar la aceleración tangencial. Esto es $a_T = l\frac{d^2\theta}{dt^2}$. La ecuación del movimiento tangencial es por consiguiente:

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\, sen\theta \qquad \text{ó} \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} sen\theta = 0$$

Si el ángulo θ es pequeño, lo cual es cierto si la amplitud de las oscilaciones es pequeña, podemos escribir $sen\theta \approx \theta$, y la ecuación del movimiento del péndulo se puede escribir:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Así, el movimiento angular del péndulo es armónico simple con $\omega^2 = \frac{g}{l}$. El ángulo θ puede así expresarse en la forma $\theta = \theta_0\, sen(\omega t + \alpha)$. Entonces, usando la ecuación $P = \frac{2\pi}{\omega}$, el período de oscilación está dado por la expresión

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Nótese que el período es independiente de la masa del péndulo. Para mayores amplitudes, la aproximación $sen\theta \approx \theta$ no es válida. En tal caso, la fórmula del período depende de la amplitud θ_0 y viene dad por la serie:

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}sen^2\frac{1}{2}\theta_0 + \frac{9}{64}sen^4\frac{1}{2}\theta_0 + \ldots\right)$$

3.2. Corriente Alterna

Si una bobina conductora en el seno de una campo magnético constante gira con una velocidad angular también constante, se obtiene una variación de flujo del campo magnético a su través. Por la ley de Faraday se induce en dicha espira una fuerza electromotriz periódica, al igual que el flujo a través de la espira, causante de una corriente eléctrica alterna. Sea la fuerza electromotriz generada:

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 16 – MARZO DE 2009

$$\varepsilon = \varepsilon_0\, sen(\omega t)$$

ε_0 es la fuerza electromotriz máxima (que se mide en voltios en el sistema internacional) y ω es la velocidad angular de giro de la espira. La variable de la función es el tiempo y su período es $P = \frac{2\pi}{\omega}$.

En realidad, las corrientes alternas suponen variaciones de distintas formas en la fueraza electromotriz; el estudio de las corrientes sinusoidales es importante, porque el teorema de Fourier nos asegura que siempre podremos analizar una corriente periódica como suma de infinitas corrientes sinusoidales.

Si esta fuerza electromotriz armónica se aplica a un circuito cerrado, mediante consideraciones físicas puede demostrarse que la intensidad de corriente generada tiene la forma:

$$I = I_0\, sen(\omega t + \varphi)$$

Donde I_0 y φ son dos constantes que dependen de los elementos presentes en el circuito (condensadores, resistencias e inducciones) y que reciben el nombre de intensidad máxima y ángulo de fase, respectivamente.

La intensidad de esta corriente, denominada alterna, cambia de signo con el tiempo, lo que físicamente la distingue de la intensidad que circula por un circuito de corriente continua; la corriente alterna no supone un transporte continua de electrones a través del conductor como en la corriente continua, sino que consiste en una 'oscilación' de los electrones alrededor de su posición original. Su período es el mismo que el de la fuerza electromotriz que origina la corriente.

3.3. Leyes de la reflexión y de la refracción

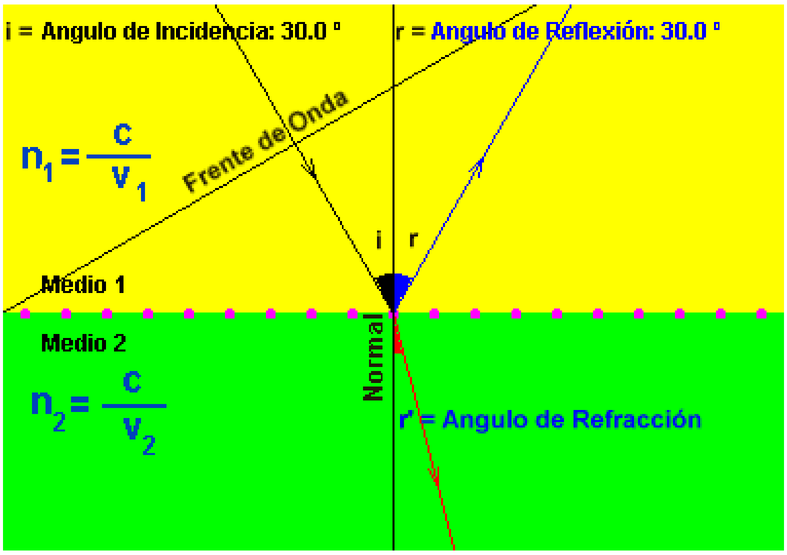
Cuando un haz de luz incide sobre la superficie que separa dos medios, en los cuales la velocidad de la luz es diferente, parte de la misma se transmite y parte se refleja. A continuación, vamos a estudiar la relación entre el *ángulo de reflexión,* y el *ángulo de refracción*, en función del *ángulo de incidencia.*

Para un medio cualquiera, el índice de refracción se define como el cociente entre la velocidad de la luz *c* en el vacío y la velocidad de la luz en un medio material transparente. El valor de *n* es siempre adimensional y mayor que la unidad y es una constante característica de cada medio:

$$n=c/v$$

REVISTA DIGITAL INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 16 – MARZO DE 2009



<u>Leyes de la reflexión</u>

Cuando un rayo incide sobre una superficie pulida y lisa y rebota hacia el mismo medio decimos que se refleja y cumple las llamadas *leyes de la reflexión*:

<u>Primera ley de la reflexión</u>

El rayo incidente forma con la normal un ángulo de incidencia que es igual al ángulo que forma el rayo reflejado y la normal, que se llama ángulo reflejado.

<u>Segunda ley de la reflexión</u>

El rayo incidente, el reflejado y la normal están en el mismo plano.

La luz se refleja también en las superficies que no son lisas pero lo hace originando rayos que no son paralelos entre sí. Cada rayo del haz cumple las leyes de la reflexión, pero las normales no son paralelas entre sí, los rayos reflejados no rebotan paralelos entre sí y la luz sale difusa. Gracias a que la luz que se refleja en nuestra cara es difusa se nos puede ver, si no deslumbraríamos.

<u>Leyes de la refracción</u>

Se dice que un rayo se refracta (cambia de dirección) cuando pasa de un medio a otro en el que viaja con distinta velocidad. En la refracción se cumplen las siguientes leyes:

<u>Primera ley de la refracción</u>

El rayo incidente, el refractado y la normal están en el mismo plano.

INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 16 – MARZO DE 2009

Segunda ley de la refracción o ley de Snell

La razón o cociente entre el seno del ángulo de incidencia y el seno del ángulo de refracción es una constante, llamada índice de refracción, del segundo medio respecto del primero o sea:

Consideremos dos medios caracterizados por índices de refracción n_1 y n_2 separados por una superficie S y en los cuales $n_2 > n_1$. Los rayos de luz que atraviesen los dos medios se refractarán en la superficie variando su dirección de propagación dependiendo de la diferencia entre los índices de refracción n_1 y n_2.

Para un rayo luminoso con un ángulo de incidencia θ_1 sobre el primer medio, ángulo entre la normal a la superficie y la dirección de propagación del rayo, tendremos que el rayo se propaga en el segundo medio con un ángulo de refracción θ_2 cuyo valor se obtiene por medio de la ley de Snell.

$$n_1\, sen(\theta_1) = n_2\, sen(\theta_2)$$

Obsérvese que para el caso de $\theta_1 = 0°$ (rayos incidentes de forma perpendicular a la superficie) los rayos refractados emergen con un ángulo $\theta_2 = 0°$ para cualquier n_1 y n_2. Es decir los rayos que inciden perpendicularmente a un medio no se refractan.

La simetría de la ley de Snell implica que las trayectorias de los rayos de luz es reversible. Es decir, si un rayo incidente sobre la superficie de separación con un ángulo de incidencia θ_1 se refracta sobre el medio con un ángulo de refracción θ_2, entonces un rayo incidente en la dirección opuesta desde el medio 2 con un ángulo de incidencia θ_2 se refracta sobre el medio 1 con un ángulo θ_1.

Una regla cualitativa para determinar la dirección de la refracción es que el rayo en el medio de mayor índice de refracción se acerca siempre a la dirección de la normal a la superficie. La velocidad de la luz en el medio de mayor índice de refracción es siempre menor.

La ley de Snell se puede derivar a partir del principio de Fermat, que indica que la trayectoria de la luz es aquélla en la que los rayos de luz necesitan menos tiempo para ir de un punto a otro. En una analogía clásica propuesta por el físico Richard Feynman, el área de un índice de refracción más bajo es substituida por una playa, el área de un índice de refracción más alto por el mar, y la manera más rápida para un socorrista en la playa de rescatar a una persona que se ahoga en el mar es recorrer su camino hasta ésta a través de una trayectoria que verifique la ley de Snell, es decir, recorriendo mayor espacio por el medio más rápido y menor en el medio más lento girando su trayectoria en la intersección entre ambos.

La luz se refracta porque se propaga con distinta velocidad en el nuevo medio. Como la frecuencia de vibración no varía al pasar de un medio a otro, cambia la longitud de onda de la luz como consecuencia del cambio de velocidad.

Reflexión interna total (Ángulo límite)

Si n_2 es mayor que n_1, como en el caso de la luz cuando pasa desde el aire (n_1) al vidrio o al agua (n_2), el rayo refractado se curva y se acerca a la normal. En caso contrario, es decir, si el rayo de luz pasara del medio 2 al medio 1, se alejaría de la normal. En este caso, es decir, cuando el rayo de luz pasa de un medio más lento a uno más rápido y se aleje de la normal, puede llegar un momento en que a un determinado ángulo de incidencia le corresponde uno de refracción de 90º y entonces el rayo refractado saldrá "rasante" con la superficie de separación de ambos medios. Este ángulo de incidencia es el llamado *ángulo límite* o ángulo crítico. Para ángulos de incidencia mayores a él, el ángulo de refracción será mayor de 90º y el rayo no será refractado, puesto que no pasa de un medio a otro, y se produce una reflexión total interna.

En este segundo caso, para un ángulo límite θ_c el ángulo de refracción es $\theta_2 = \pi/2$

$$sen(\theta_c) = \frac{n_2}{n_1}$$

El ángulo límite es aquel ángulo incidente para el cual el rayo refractado emerge tangente a la superficie de separación entre los dos medios.

Si el ángulo de incidencia es mayor que el ángulo límite, el seno del ángulo de refracción resulta mayor que la unidad. Esto indica, que las ondas que inciden con un ángulo mayor que el límite no pasan al segundo medio, sino que son reflejados totalmente en la superficie de separación.

3.4. Acción de un campo magnético uniforme sobre una carga móvil

El campo magnético, $\vec{B}$ se puede estudiar mediante una carga eléctrica en movimiento que atraviesa el campo magnético; éste interacciona con la carga produciendo una fuerza electromagnética $\vec{F}$ que es función de la carga de la partícula, q, de la velocidad de la misma, $\vec{v}$, y del campo magnético que existe $\vec{B}$.

Dicha fuerza viene dada por la ecuación:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

De aquí se deducen las propiedades de la fuerza creada por el campo magnético $\vec{B}$:

Dirección: $\vec{F}$ es perpendicular siempre a $\vec{v}$ y a $\vec{B}$, por tanto, al plano que forman $\vec{v}$ y $\vec{B}$.

Sentido: es el del producto vectorial $q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$**.**

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 16 – MARZO DE 2009

Magnitud: $\left|\vec{F}\right| = q \cdot v \cdot B \cdot sen\varphi$, siendo φ el ángulo $(\vec{v}, \vec{B})$.

De aquí se deduce: $\left|\vec{F}\right| = 0$ cuando $\vec{v}$ y $\vec{B}$ están alineados (misma dirección), o la velocidad es cero (partícula en reposo); y $\left|\vec{F}\right|$ es máxima cuando $\vec{v} \perp \vec{B}$, pues $\varphi = \frac{\pi}{2}$ y $sen\frac{\pi}{2} = 1$.

4. CONCLUSIÓN

Las funciones circulares (o trigonométricas) son básicas para el estudio de las funciones periódicas. Los movimientos circular y elíptico se describen matemáticamente mediante funciones seno y coseno actuando sobre la variable tiempo; como estos movimientos aparecen frecuentemente, el seno y el coseno también.

En este artículo hemos definido las funciones circulares y a continuación, hemos desarrollado algunas de las numerosas aplicaciones de estas funciones, como han sido la cinemática del movimiento armónico simple, el estudio del movimiento de un péndulo, la corriente alterna, las leyes de la reflexión y de la refracción y la acción de un campo magnético uniforme sobre una carga móvil.

5. BIBLIOGRAFÍA

Alonso, M. y Finn, E. (1986). *Física. Volumen I: Mecánica.* México: Addison - Wesley Iberoamericana

Reitz, J., Milford, F. y Christy, R. (1996). *Fundamentos de la teoría electromagnética.* México: Addison - Wesley Iberoamericana

Rey Pastor, J. y Castro, A. (1967). *Elementos de Matemáticas.* Madrid: Sociedad Anónima Española de Autores y Traductores.

Pisot, C. y Zamansky, M. (1966). *Matemáticas Generales.* Barcelona: Montaner y Simón.

Spivak, M. (2003). *Calculus.* Massachusetts, EE. UU: Editorial Reverté.

Alexandrov, A. D. y otros. (1974). *La matemática: su contenido, métodos y significado.* Madrid: Alianza Editorial

Kline, M. (2002). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días.* Madrid: Alianza Editorial

6. REFERENCIAS WEB

- http://.descartes.cnice.mecd.es
- http://.centros5.pntic.mec.es
- http://personales.ya.com/casanchi/mat/fcirculares01.htm

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 16 – MARZO DE 2009

Autoría

- Nombre y Apellidos: Silvia Borrego del Pino
- Centro, localidad, provincia: I.E.S. Ángel de Saavedra. Córdoba. Córdoba
- E-mail: depis79@hotmail.com