



ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 17 – ABRIL DE 2009

## “DEDUCCIÓN DE FÓRMULAS COMBINATORIAS”

AUTORÍA FÁTIMA ARANDA LORENTE
TEMÁTICA COMPETENCIA MATEMÁTICA
ETAPA ESO

### Resumen

Mediante el artículo “curiosidades combinatorias”, se potencia al alumnado para que aprecie el lado práctico de las técnicas de recuento y trabaje con diferentes fuentes de información. Los estudiantes descubrirán cómo son capaces de resolver cuestiones populares únicamente desarrollando la capacidad de extraer la información relevante en cada caso.

A continuación pretendemos desarrollarles **herramientas básicas** que conduzcan a comprender el concepto de combinatoria y deducir distintos procedimientos.

### Palabras clave

Combinatoria  
Diagrama de árbol  
Permutación con/sin repetición  
Variación con/sin repetición  
Combinación con/sin repetición



ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 N° 17 – ABRIL DE 2009

## 1. OBJETIVOS Y CONCEPTOS

Objetivos	Conceptos
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Reconocer situaciones diversas de enumeración</li> <li>- Descubrir con ayuda del diagrama de árbol, la regla del producto y aplicarla para resolver problemas, así como la regla de la suma</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Principio de la suma</li> <li>- Principio de la multiplicación</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Identificar situaciones combinatorias simples, capaces de modelizarse mediante variaciones, combinaciones o permutaciones</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Permutación con/sin repetición</li> <li>- Variación con/sin repetición</li> <li>- Combinación con/sin repetición</li> </ul>
Resolver problemas relativos a permutaciones o variaciones con o sin repetición	Deducción de fórmulas para variaciones y permutaciones

## 2. COMPETENCIAS BÁSICAS

Aunque se trabajan todas y cada una de las competencias, resaltamos las que se muestran a continuación

### CONTRIBUCIÓN AL DESARROLLO DE LAS COMPETENCIAS BÁSICAS

<b>Tratamiento de la información y competencia digital</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Calcular factoriales con la calculadora</li> <li>– Acceder a recursos didácticos en internet.</li> </ul>
<b>Competencia en comunicación lingüística</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Interpretar textos relacionados con técnicas de recuento.</li> <li>– Analizar en enunciados tres características:               <ol style="list-style-type: none"> <li>a) Importa o no el orden</li> <li>b) Se permiten o no repeticiones</li> <li>c) Intervienen o no todos los elementos</li> </ol> </li> </ul>



ISSN 1988-6047

DEP. LEGAL: GR 2922/2007 N° 17 – ABRIL DE 2009

**Competencia en expresión cultural y artística**

- Diseñar diagramas en árbol.
- Reconocer la historia de los juegos de tablero y el arte de invención de sus reglas

**Autonomía e iniciativa personal**

- Escoger el modelo de recuento.
- Aplicar conceptos de combinatoria
- Planificar estrategias de resolución.

**Competencia de aprender a aprender**

- Comprobar las soluciones obtenidas.
- Deducción de fórmulas en las distintas técnicas de recuento

### 3. ANÁLISIS DE LAS DIFICULTADES DE APRENDIZAJE

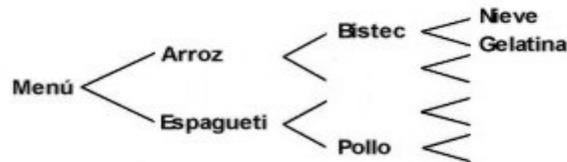
Entre las **dificultades y errores en la resolución de problemas combinatorios** que resalta Hadar y Hadass (1981) citamos las siguientes:

- Identificación del grupo de sucesos u objetos que se pide enumerar o contar.* A veces los estudiantes no reconocen el conjunto correcto de objetos que se debe enumerar
- Elegir una notación apropiada* que represente de una forma compacta toda la información y condiciones dadas. Esta dificultad aumenta por el hecho de que diferentes textos presentan distintas notaciones para las operaciones combinatorias.
- Generalizar la solución:* Muchas veces, aunque el alumno resuelve con éxito un problema combinatorio para varios casos particulares, fallan al encontrar una solución general, al no ser capaz de unir las soluciones de una forma recursiva.

### 4. PROPUESTA DE ACTIVIDADES

#### 4. 1. Necesidad de distinguir en etapas. Diagrama de árbol. Principio de la multiplicación

En un restaurante un cliente puede escoger una sopa, un guisado y un postre del menú que se muestra. Por ejemplo, durante el día de hoy puede escoger entre arroz o espagueti de primer plato, Bistec o pollo de segundo y nieve o gelatina de postre. ¿De cuántas maneras pueden combinar sus alimentos las personas que comen ahí? Dedúcelo completando el siguiente diagrama



Repita de forma similar el mismo razonamiento para los siguientes casos:

- a) En una merienda escolar se reparte un bocadillo, un refresco y un trozo de tarta a cada alumno. Si el bocadillo puede ser de chorizo, jamón o queso, el refresco de naranja o limón y la tarta de manzana o chocolate. ¿De cuántas maneras puede elegir la merienda cada alumno? Ilustra mediante un diagrama de árbol
- a) El juego del dominó tiene dos tipos de fichas dobles y ordinarias. ¿Puedes dibujar todas las fichas diferentes que componen un dominó, en el cuál podemos tomar de cero a seis puntos?

#### 4. 2. Diferencia entre principio de adición y multiplicación

Analiza las diferencias entre los dos casos siguientes y los trabajados anteriormente:

- a) Dispongo de tres caminos para ir a la ciudad A y cuatro para llegar a la ciudad B. ¿Por cuántos caminos puedo llegar a cualquiera de las dos ciudades?
- b) Tiro dos dados y ganaré si la suma es 7 u 8 ¿Cuántas posibilidades tengo?

Puedes observar cómo anteriormente podemos dividir los acontecimientos en etapas: primer plato, segundo plato, postre...cada etapa se corresponde con un nivel en el árbol. Sin embargo, en estos dos casos no hay etapas, basta con cumplir una de las dos condiciones.



ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 17 – ABRIL DE 2009

#### 4. 3. Interpretación correcta de enunciados, distinguiendo orden, repetición y si intervienen o no todos los elementos

Sin necesidad de resolver las siguientes cuestiones, nos centraremos simplemente en que sean capaces de distinguir las características:

- Si intervienen o no todos los elementos
- ¿Es importante el orden?
- Se pueden repetir los elementos

**Ejemplo 1.**  
¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con los dígitos 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9?

- El orden es importante, pues no es lo mismo el número 123 que 321
- No intervienen todos los elementos, pues partimos de 10 dígitos y vamos a usar a lo sumo tres diferentes
- El hecho de que se puedan repetir o no lo debería especificar el enunciado, como la siguiente cuestión no te permite repetir, se supone que en este primero si se puede

¿Y si no se pueden repetir las cifras?

Las características son idénticas salvo la última, que en este caso no se pueden repetir

**Ejemplo 2.** ¿De cuántas formas pueden elegirse una comisión de 4 personas entre 15 sin distinción de cargos?

En este caso, resaltar que el orden no es importante, pues al no distinguir los cargos, tan sólo me importa pertenecer o no al grupo de los cuatro elegidos

¿Y si los cargos son diferentes?

En este caso, si es importante el orden, pues no será lo mismo que te den un cargo u otro. Se supone que a una misma persona no le darán más de un cargo, por lo que no se puede repetir, y por supuesto no intervienen todos los elementos, ya que sólo serán cuatro los elegidos

A continuación se muestra un listado de cuestiones en las que NO debes resolverlas, tan sólo es necesario que identifiques las tres características, por ello se facilita a continuación un cuadro para que rellenes el caso correcto

1. Con las letras de la palabra JUNIO, ¿cuántas palabras, con o sin significado, podemos formar con 4 letras, pudiendo estas repetirse?



ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 17 – ABRIL DE 2009

2. En un torneo de balonmano hay 8 equipos participantes y solo 3 trofeos, ¿de cuántas maneras distintas se pueden repartir los premios 1º, 2º y 3º?
3. Tenemos que formar un código de 6 cifras con los dígitos 0 y 1. ¿Cuántas posibilidades hay?
4. Sabiendo que los puestos de delegado y de subdelegado no pueden ser cubiertos por la misma persona, calcula cuántas posibilidades hay para cubrir ambos cargos en una clase de 22 alumnos.
5. En una carrera organizada en un centro escolar participan los 6 finalistas de 4º ESO. ¿De cuántas formas distintas pueden llegar a la meta?
6. Con los dígitos impares, ¿cuántos números de cinco cifras distintas se pueden formar?
7. ¿De cuántas formas se pueden repartir 4 bocadillos distintos entre 4 amigos, si cada uno debe recibir solo uno?
8. Marcos tiene 8 sabores distintos de helado para preparar copas de 3 sabores. ¿Cuántas copas distintas puede preparar sin repetir sabores?
9. Un club de tenis dispone de 15 jugadores profesionales de los cuales debe seleccionar 8 para jugar un torneo. ¿Cuántos grupos se pueden formar?
10. Para formar la tripulación de un avión se eligen 3 comandantes y 4 azafatas entre un grupo de 11 personas, 5 de las cuales son comandantes y el resto, azafatas. ¿Cuántas tripulaciones distintas se pueden formar?

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<i>¿Importa el orden?</i>										
<i>¿Se pueden repetir?</i>										
<i>¿Intervienen todos los elementos?</i>										

**Distingue a continuación el nombre que recibe cada agrupación en función a las características anteriores**

- Identificar los elementos disponibles  $m$  y los elementos que tomamos  $n$ .
- ¿Importa el **orden** de colocación de los elementos?  
**Si.** Pueden ser variaciones o permutaciones.



ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 17 – ABRIL DE 2009

No. Son combinaciones.

- ¿Tomamos **todos** los elementos disponibles o **algunos**?  
Si cogemos **todos los elementos** son **permutaciones**  $m = n$ .  
Si tomamos **algunos** son **variaciones**.
- ¿Se pueden repetir los elementos ?  
Si se pueden repetir serán variaciones, o permutaciones **con repetición**.  
Si no se pueden repetir serán variaciones o **permutaciones sin repetición**.

#### 4. 4. Introducción a diferentes técnicas de recuento. Deducción de la fórmula

Resuelve las siguientes situaciones, haciendo uso de la regla del producto y el diagrama de árbol para ayudarte:

##### Situación 1 (Variación sin repetición):

Para un concurso de pinchadiscos que organizan los Cuarenta Principales es necesario presentar dos canciones del disco "Tierra para bailar" de Radio futura. Debes presentarlas grabada en un cd, eligiendo cuál será la primera y cuál la segunda. Las canciones son:

- |                            |                       |
|----------------------------|-----------------------|
| 1. El tonto Simón          | 5. Dance usted        |
| 2. Paseo con la negra flor | 6. The school of heat |
| 3. Semilla negra           | 7. Corazón de tiza    |
| 4. El puente azul          | 8. Tierra             |

Escribe en la primera cuadrícula, cuántas posibilidades tienes para elegir la primera canción, y en la segunda, cuantas para la segunda, suponiendo asignada ya la primera.

--	--

Compara el resultado con tu diagrama de árbol, ¿Cuántas posibilidades hay en total?

##### Situación 2 (Variación con repetición)



ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 17 – ABRIL DE 2009

Son siete las figuras que salen por cada una de las ventanas de una máquina tragaperras, ¿Cuántas combinaciones diferentes pueden conseguirse?

Utiliza el mismo razonamiento anterior, escribiendo en cada cuadrícula el número de posibilidades:

--	--	--

¿Qué diferencia existe con el caso anterior?

### **Situación 3 (Permutación sin repetición)**

Cinco hombres Antonio, Basilio, Carlos, Daniel y Esteban esperan en la consulta del dentista para extraerse una muela. Ninguno quiere entrar el primero. Por ello deciden sortear el orden de entrada de forma que cada uno escribe su nombre en un papel y se extraen sucesivamente los papeles. El nombre obtenido en primer lugar será el primero, y así sucesivamente.

- a) Describe un plan de formación de todas las ordenaciones posibles mediante una tabla o un diagrama. ¿Cuántos resultados diferentes podemos obtener en el sorteo?
- b) Supongamos que ya ha entrado uno de los cinco y que los cuatro restantes vuelven a sortear el orden de entrada. ¿Cuántas formas diferentes hay ahora para ordenarlos?

Una vez elaborado el diagrama de árbol, utiliza de nuevo la técnica de poner en cada cuadrícula el número de posibilidades que hay para que ocupen el primer puesto, el segundo y así sucesivamente.

--	--	--	--	--

### **Situación 3 (Permutación con repetición)**

¿Qué ocurriría si nos planteáramos cuántas palabras distintas, con o sin sentido, se pueden formar con la palabra MATEMATICAS?

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--



ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 N° 17 – ABRIL DE 2009

Podríamos usar el mismo truco que en el apartado anterior, pero tenemos un pequeño problema: hay letras que se repiten. Estas letras van a reducir en realidad el número de casos, luego

Si los 11 objetos que aparecen en las permutación fueran todos distintos, evidentemente estaríamos en el caso de las permutaciones ordinarias y el número de agrupaciones sería  $P_{11} = 11!$ .

Si en una de las palabras cambiáramos el orden de las 'A', 'M' o 'T' entre sí, no lo apreciaríamos, sería la misma. Por ello, bastará con dividir el número de permutaciones entre todas las distintas ordenaciones que obtendríamos con las letras que se repiten. El número de posibles palabras sería

$$\frac{11!}{3! \cdot 2! \cdot 2!}$$

## 5. COMBINACIONES. NÚMEROS COMBINATORIOS

### Situación 1 (Combinaciones sin repetición)

María ha ido a matricularse en el instituto. Su curso consta de 5 asignaturas, tres obligatorias (Matemáticas, Física y Ciencias Naturales) y dos Optativas. Las ofertadas como optativas son:

- Informática (I)
- Religión (R)
- Deporte (D)
- Economía (E)
- Música (M)
- Tecnología (T)
- 

- a) ¿Puedes enumerar, mediante la ayuda de un diagrama en árbol, todas las elecciones diferentes que puede hacer María?
- b) Decide echarlo a suerte. Para la elección escribe en un papel cada una de las asignaturas y toma dos sin mirar. Calcula el número de matriculaciones diferentes
- c) Imagina que puede elegir tres asignaturas. Calcula el número de posibilidades diferentes  
¿Cuántas posibles elecciones habrá para  $n$  asignaturas diferentes si hay que elegir  $r$ ?

### Situación 2 (Combinaciones con repetición)

**¿Cómo se forman?** Para construir las combinaciones con repetición, partimos del conjunto  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  y vamos a construir todas las combinaciones con repetición posibles.

De un elemento. Si tenemos un conjunto de cuatro elementos y queremos hacer grupos de uno, únicamente podremos hacer cuatro grupos: 1, 2, 3, 4.



**ISSN 1988-6047    DEP. LEGAL: GR 2922/2007    Nº 17 – ABRIL DE 2009**

De dos elementos. La forma de construir las será similar a las combinaciones sin repetición aunque con la diferencia de que al permitirse repetir los elementos tendremos que añadir a cada una de las de orden uno, el mismo elemento y todos los siguientes. Así se obtienen: 11 , 12 , 13 , 14 , 22 , 23 , 24 , 33 , 34 , 44.

De tres elementos. Se pueden construir a partir de las anteriores añadiendo a cada combinación de orden dos el último elemento y todos los elementos siguientes. Se obtienen: 111 , 112 , 113 , 114 , 122 , 123 , 124 , 133 , 134 , 144 , 222 , 223 , 224 , 233 , 234 , 244 , 333 , 334 , 344 , 444

De cuatro elementos. Se pueden obtener a partir de las de orden tres, añadiendo a cada una de ellas el último elemento y los elementos siguientes.

De cinco o más elementos. Como estamos construyendo combinaciones con repetición y los elementos se pueden repetir, podríamos continuar construyendo combinaciones de orden cinco o más elementos.

Se puede comprender mejor la formación de las combinaciones con repetición utilizando el diagrama de árbol.

**6. MAPA CONCEPTUAL. AFIANZAR CONOCIMIENTOS APRENDIDOS A LO LARGO DEL TEMA**

Repasa mediante el siguiente esquema, lo aprendido con anterioridad y completalo buscando un ejemplo para cada caso

¿Importa el orden?	¿Se toman todos los elementos?	¿Se repiten los elementos?	TÉCNICA DE RECuento	EJEMPLO
<b>SI</b>	<b>NO</b>	<b>NO</b>	<b>VARIACIONES</b> de n elementos tomados de k en k. $V_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$	
		<b>SÍ</b>	<b>VARIACIONES con REPETICIÓN</b> de n elementos tomados de k en k. $VR_{n,k} = n^k$	
	<b>SÍ</b>	<b>NO</b>	<b>PERMUTACIONES</b> de n elementos. $P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$	
		<b>SÍ</b>	<b>PERMUTACIONES con REPETICIÓN</b> de n elementos del tipo $n_1, n_2, \dots, n_k$ . $PR_{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$	
<b>NO</b>	<b>NO</b>	<b>NO</b>	<b>COMBINACIONES</b> de n elementos tomados de k en k. $C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$	
		<b>SÍ</b>	<b>COMBINACIONES con REPETICIÓN</b> de n elementos tomados de k en k. $CR_{n,k} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!}$	



ISSN 1988-6047    DEP. LEGAL: GR 2922/2007    Nº 17 – ABRIL DE 2009

## 7. BIBLIOGRAFÍA

Grimaldi, Ralph P. (1998). *Matemáticas discreta y combinatoria*. Addison-Wesley Iberoamericana.

Navarro-Pelayo, V. (1994). *Estructura de los problemas combinatorios simples y del razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

### Autoría

---

- Nombre y Apellidos: Fátima Aranda Lorente
- Centro, localidad, provincia: IES Seritium, Jerez de la Frontera, Cádiz
- E-mail: fatimaranda@hotmail.com