



ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 17 – ABRIL DE 2009

“GEOMETRÍA INTERACTIVA”

AUTORÍA PATRICIA PÉREZ ORTIZ
TEMÁTICA NNTT
ETAPA ESO Y BACHILLERATO

Resumen

El artículo pretende ser un primer acercamiento a los conceptos básicos de la llamada Geometría Interactiva o Dinámica. Analizará brevemente su papel en la enseñanza y sus implicaciones metodológicas. Enumerará los programas de Geometría Interactiva o procesadores geométricos más usuales y algunas páginas en la Web de visita obligada para los lectores interesados.

Palabras clave

- Geometría interactiva o dinámica.
- Dibujo geométrico frente a construcción.
- Objetos libres o independientes frente a dependientes o ligados.

1. INTRODUCCIÓN

Cuando se juntan profesionales de la enseñanza es habitual poner a caldo su situación actual, minusvalorar el conocimiento que los alumnos poseen de las diversas disciplinas y muy en particular de la matemática.

Tal hecho será seguramente cierto pero mucho más lo es que dentro de la matemática el conocimiento de la geometría es precario en grado sumo. Es posible que los alumnos salgan de la Enseñanza Secundaria con algunos conocimientos numéricos y un cierto dominio de las herramientas del cálculo que les permitan moverse en la sociedad actual, pero lo mismo no podría afirmarse de sus conocimientos geométricos. Éstos como mucho se limitan al reconocimiento de algunas figuras y al empleo de fórmulas para el cálculo de áreas y volúmenes. Estas mismas fórmulas con frecuencia son utilizadas desde su vertiente algebraica no geométrica, como generadoras de ecuaciones en las que ejercitarse en despejar incógnitas. Nada que ver con la finalidad formativa que desde los griegos se ha atribuido a la Geometría.



ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 17 – ABRIL DE 2009

En palabras de Antonio Pérez Sanz, en la referencia que se encuentra al final del presente artículo: “La Geometría ha sido durante siglos uno de los pilares de la formación académica de los jóvenes desde edades muy tempranas. Relacionarse con el espacio físico que nos rodea es una necesidad imperiosa del ser humano desde su nacimiento. Por otra parte, nadie cuestiona la importancia de la geometría como formadora del razonamiento lógico. Pocos son quienes discuten su trascendencia tanto en estudios posteriores de cualquier ciencia como en el desarrollo de habilidades cotidianas. Durante la segunda mitad del siglo pasado, la geometría perdió paulatinamente presencia en los planes de estudio. Afortunadamente, los actuales currículos de matemáticas de todos los niveles educativos confieren a esta rama de las matemáticas la importancia que nunca debió perder”.

Los programas de Geometría Interactiva pueden de alguna manera contribuir a remediar las carencias geométricas de los alumnos introduciendo en las aulas la formulación de hipótesis geométricas, la experimentación y la comprobación de lo acertado o no de tales hipótesis. Y todo ello sin excesivos costes materiales y de tiempo.

2. ¿QUÉ ES LA GEOMETRÍA INTERACTIVA?

Frente a la clase tradicional en que las figuras geométricas se construían sobre el papel y la pizarra la Geometría Interactiva hace uso de la pantalla del ordenador como espacio virtual en el que cobran vida aquéllas. La eliminación de errores, el borrado, la incorporación en construcciones posteriores de lo anteriormente hecho son ventajas inherentes que definen una nueva forma de trabajar y de hacer geometría.

Mas esto sólo no justificaría nuevas herramientas didácticas, bastaría con cualquiera de los muchos y buenos programas de dibujo por ordenador, máxime cuando el quehacer geométrico no requiere especiales recursos informáticos. Pero los objetos de la geometría no son simplemente dibujo, sino que están gobernados por relaciones geométricas. Así, por ejemplo, un cuadrado es un paralelogramo cuyos ángulos son rectos y cuyos lados miden lo mismo, y las consecuencias geométricas que se deriven de ello no han de depender del dibujo de un cuadrado concreto sino que han de aplicarse a todos los cuadrados y depender únicamente de las propiedades geométricas que lo definen.

La Geometría Interactiva no produce dibujos, sino construcciones y configuraciones geométricas donde los objetos están gobernados por las leyes de la geometría. Así para construir un paralelogramo no utilizará una retícula en cuyos puntos encajar los vértices de aquél, sino que definirá rectas paralelas dos a dos y en su confluencia colocará los vértices del paralelogramo. Un “verdadero” triángulo rectángulo no será sólo una “apariencia” de triángulo rectángulo, sino que el mismo estará gobernado permanentemente por las leyes de la geometría. Por más que en él sean permitidos algunos cambios y transformaciones, por ejemplo arrastrando sus vértices y cambiando su posición en el espacio virtual, seguirá siendo un triángulo rectángulo. En alguna manera la Geometría Interactiva contradice la afirmación que aseveraba que “la Geometría era la ciencia y el arte de razonar correctamente a partir de dibujos incorrectos”.

Para conseguir tal propósito la Geometría Interactiva distingue entre dos tipos de objetos:



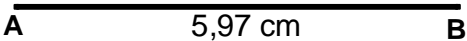
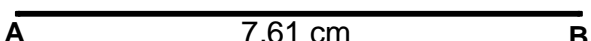
INNOVACIÓN
Y
EXPERIENCIAS
EDUCATIVAS

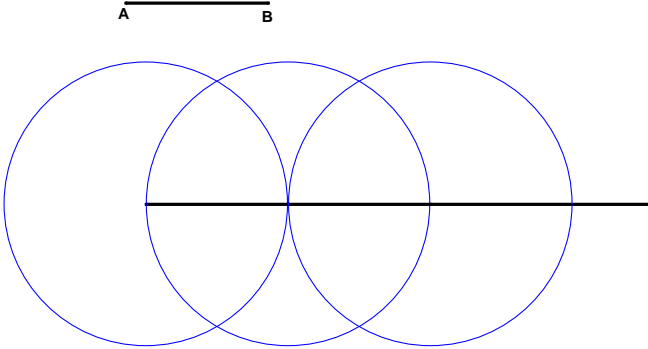
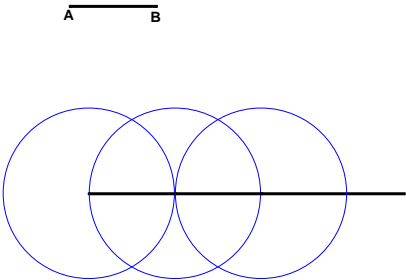
ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 17 – ABRIL DE 2009

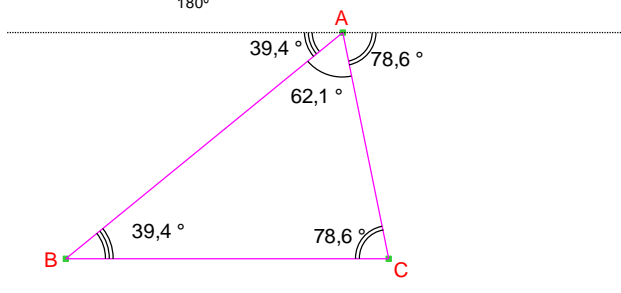
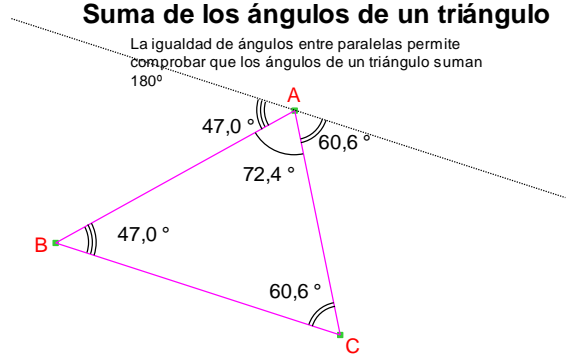
- Objetos libres
- Objetos ligados o dependientes.

Los objetos libres pueden ser movidos libremente a través del espacio virtual mediante arrastre, el cual normalmente se realiza con el ratón. Los objetos ligados no pueden moverse por sí mismos, si se mueven lo harán únicamente a través de los objetos a los que están atados. Así, por ejemplo, si se definen o construyen dos rectas marcando en el espacio virtual dos puntos por los que cada una de ellas ha de pasar, las rectas se moverán a través de los puntos a partir de los cuales han sido definidas. Si ambas rectas, que son objetos ligados, se cortan en un punto éste será también un objeto ligado a ambas rectas. Los objetos ligados sólo pueden cambiar cuando cambian aquellos que lo definen.

Los puntos que se definen sobre un objeto son libres en el sentido que pueden moverse libremente sobre el objeto definido pero en cierta forma son también ligados pues lo están al objeto sobre el que se han definido.

	
La medida está ligada al segmento AB	La medida se ajusta automáticamente al variar el segmento al que está ligada

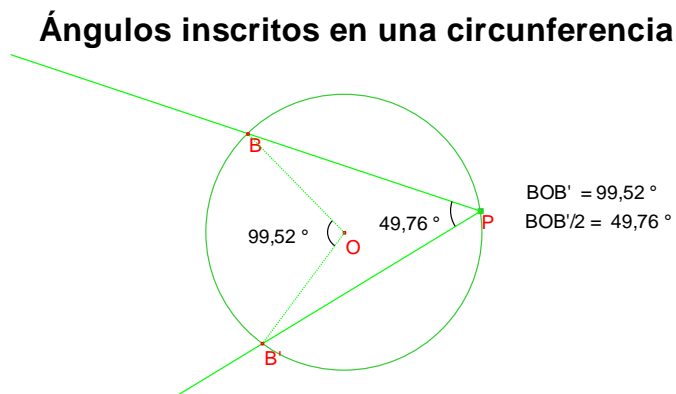
	
Tres circunferencias encadenadas de radio AB	Las mismas circunferencias al variar el radio AB

<p style="text-align: center;">Suma de los ángulos de un triángulo</p> <p style="text-align: center; font-size: small;">La igualdad de ángulos entre paralelas permite comprobar que los ángulos de un triángulo suman 180°</p> 	<p style="text-align: center;">Suma de los ángulos de un triángulo</p> <p style="text-align: center; font-size: small;">La igualdad de ángulos entre paralelas permite comprobar que los ángulos de un triángulo suman 180°</p> 
<p>Al cambiar los vértices del triángulo cambian los ángulos, pero se visualiza la permanencia de su suma, que es 180°</p>	

Los ejemplos anteriores demuestran que una buena construcción en Geometría Interactiva es modélica. Un triángulo concreto es una representación de los triángulos ideales que son objeto de la Geometría. Un círculo definido a partir de un centro y radio libres puede servir para ejemplificar cualquiera de los posibles círculos. Desde el mismo punto de vista una medida concreta obtenida a partir de dos puntos sobre una semirrecta puede también ser considerada como una particularización de una variable numérica.

En Geometría Interactiva las construcciones geométricas son dinámicas y como tales constituyen representaciones de configuraciones geométricas genéricas.

Si se desea comprobar que un ángulo inscrito en una circunferencia es la mitad del arco que abarca bastaría con construir una circunferencia y sobre ella tomar uno de sus puntos. Desde él trazar sendos segmentos a otros puntos de la circunferencia. Sobre esta circunferencia concreta comprobar que la medida del ángulo inscrito es la mitad de la del arco abarcado. Al variar cualquiera de los elementos libres que han intervenido en la construcción puede observarse la permanencia de la relación anterior.



Construcción en la que se comprueba que el ángulo inscrito es la mitad del arco abarcado.



ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 17 – ABRIL DE 2009

La Geometría Interactiva permite comprobar la veracidad de los teoremas de la geometría, pero lo que es más importante permite experimentar, intuir y formular hipótesis plausibles. Construir, medir, arrastrar objetos para ver si relaciones como equidistancia, colinealidad, proporcionalidad, paralelismo etc. se mantienen puede convertirse en una experiencia amena y si es posible divertida.

3. HERRAMIENTAS DE LOS PROGRAMAS DE GEOMETRÍA INTERACTIVA

Los programas de Geometría Interactiva disponen de múltiples herramientas y funcionalidades. Algunas de ellas son esenciales y comunes a todos ellos como las que permiten introducir:

- puntos libres, puntos sobre objetos y puntos intersección
- rectas, segmentos, semirrectas
- rectas paralelas, rectas perpendiculares, mediatrices, bisectrices
- Círculos
- Textos y etiquetas
- Información sobre distancias, ángulos, relaciones de pertenencia, paralelismo, perpendicularidad.

Sin embargo el hecho de que estas funcionalidades sean comunes a todos los programas no evita que en las mismas pueda haber sutiles diferencias. Así, por ejemplo, Geogebra define las rectas mediante la introducción de dos puntos mientras que Cabri admite además la posibilidad de definir una recta mediante un punto y una dirección.

A estas herramientas básicas suelen acompañar otras muchas que posibilitan la simplificación de las construcciones con objeto de que no sea necesario empezar desde cero y se haga menos costoso avanzar en el conocimiento geométrico. La incorporación o no de estas herramientas es lo que a primera vista distingue unos programas de otros. Así Geogebra incorpora la construcción de una circunferencia dados tres de sus puntos, no así Cabri. Éste integra una calculadora estándar mientras que aquél dispone de toda una ventana algebraica...

Entre aquellos elementos que han ido incorporándose a los programas de Geometría Interactiva y que aún no son comunes pueden citarse:

- Posibilidad de definir ángulos cóncavos
- Construcción de triángulos, polígonos regulares, arcos de circunferencia, sectores, cónicas, cúbicas...
- Construcción de rectas tangentes a una circunferencia, incluso a una cónica...
- Introducción de vectores y operaciones con los mismos
- Incorporación de transformaciones, isometrías, homotecias, y también inversiones.



ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 17 – ABRIL DE 2009

- Incorporación de la geometría cartesiana de coordenadas y ecuaciones de rectas, circunferencias, cónicas.
- Construcción de lugares geométricos generados por el movimiento de puntos sometidos a ciertas condiciones y también como envolventes.
- Posibilidad de que los objetos al ser desplazados dejen traza o huella
- Posibilidad de animación de los objetos.
- Creación de un entorno para el estudio de las geometrías no euclídeas

Además de estas herramientas existen aspectos no menos importantes que mejoran la presentación y la comprensión de las construcciones como pueden ser el color, los distintos tipos de trazos, la ocultación de objetos, los atributos, las marcas de ángulos...

Existen también algunas características que hasta el presente no son comunes y que pueden hacer que algunos de estos programas se revelen como especialmente útiles en la enseñanza como pueden ser la las posibilidades de configurar el propio menú de herramientas y de definir macros. La investigación sobre la mediatriz como lugar geométrico dejaría de tener todo su sentido si el alumno dispone de una herramienta en el menú que permite construir la mediatriz de un segmento, no así si ésta herramienta puede ocultarse. La posibilidad de definir macros o agrupar secuencias de órdenes bajo una misma herramienta se convierte en indispensable si se intensifica el uso del programa o si se quiere soslayar ciertos circuitos. Geogebra, por ejemplo, sólo incluye dos formas de introducir una circunferencia, mediante el centro y un punto de la misma, y mediante el centro y el radio en formato numérico. Si quisiéramos disponer de la posibilidad de introducir un círculo a partir del centro y de dos puntos que definan la medida del radio, obviando así el recurso a los números, ello puede conseguirse mediante una macro.

4. FUTURO DE LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA DINÁMICA

No cabe duda que la incorporación en la enseñanza de los programas de Geometría Dinámica o Interactiva puede contribuir a sacar la Geometría del rincón de la escena matemática. Existe muchísimo material educativo disperso que puede considerarse partícipe en mayor o menor medida de la filosofía de la Geometría Dinámica. Con frecuencia ese material y los programas a él asociados o se desconocen y si son conocidos no se usan con regularidad en las aulas. La geometría sigue enseñándose en gran parte de forma estática, como si sus conceptos y procedimientos fuesen fósiles y reliquias del pasado.

La Geometría Dinámica ha colocado en el centro de la escena la experimentación, la construcción de conceptos, la formulación de hipótesis y su comprobación experimental. El mundo virtual que ella crea permite la interacción con objetos "geométricos" y la socialización en el aula. Y a la vez modula, transforma los papeles que desempeñan el profesor y los alumnos. Éstos construyen, experimentan, formulan y comprueban conjeturas, descubren y ponen en común propiedades geométricas de los



ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 17 – ABRIL DE 2009

objetos construidos. El profesor prepara los guiones, ayuda, resuelve dudas, participa en los análisis y discusiones, posibilita la síntesis de las distintas experiencias.

Según los medios informáticos de que están dotados los centros educativos los programas de Geometría Interactiva pueden usarse en dos planos principalmente:

- Realizando prácticas guiadas en las aulas de informática y con grupos estables de alumnos
- En la propia aula del grupo, en compañía del proyector y/o la pizarra digital, como soporte de las explicaciones y actividades.

Aún en el caso que dicho material sea usado y así debe ser en muchos centros de enseñanza como lo prueba su misma abundancia, ello no significa que los problemas de la enseñanza de la geometría hayan sido resueltos. Los nuevos medios resuelven unos problemas pero a su vez plantean otros. Al igual que sucedió con la introducción de las calculadoras predicen un cambio no sólo de escenario sino también de obra teatral. ¿Qué ha de enseñarse en Geometría y cómo? Preguntas como “¿es más importante calcular el área de un triángulo rectángulo o construir el triángulo rectángulo a partir de una circunferencia?” o similares se formulan con frecuencia. ¿El alumno debe en principio, como parece suponer mucho del material presente en Internet, limitarse a ser un usuario del dicho material a golpes de ratón o debe más bien ser capaz de diseñar construcciones geométricas mediante los programas de los que es usuario?

Es, además, manifiesto que dicho material no ha sido contrastado suficientemente ni se han analizado en profundidad las consecuencias de su uso.

Por todo ello la CE, consciente de estas limitaciones, elaboró en Oct/Nov 2007 el proyecto INTERGEO para hacer accesible en toda Europa la Geometría Dinámica en la enseñanza de las matemáticas. La duración del proyecto será de tres años. En su presentación se afirmó que pasados los tres años “la infraestructura creada por éste será transferida al ámbito público para garantizar la continuidad de la iniciativa”.

En sus mismas palabras “el proyecto Intergeo de la Unión Europea persigue allanar las tres principales barreras que obstaculizan en estos momentos el uso generalizado del material didáctico de geometría interactiva:

- la carencia de herramientas de búsqueda automática (de los materiales más adecuados para un objetivo pedagógico concreto),
- la falta de compatibilidad (entre materiales desarrollados por distintos programas de geometría dinámica)
- la ausencia de información contrastada sobre las características de los materiales existentes”.

En referencia a esto último “los materiales disponibles se enriquecerán con datos curriculares que facilitarán la búsqueda de los ejemplos apropiados para un determinado tema de clase. Se aclararán los derechos de propiedad intelectual de estos materiales. Los profesores no necesitarán seguir preguntándose si está permitido o no redistribuir tal o cual ejemplo entre sus estudiantes”.



ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 17 – ABRIL DE 2009

El proyecto Intergeo menciona además la necesidad de “un formato común” que permita compartir los documentos realizados con los diferentes programas de geometría interactiva, lo que permitirá crear una base común utilizable desde todos los sabores que comparten el interés por la Geometría Dinámica, ya sean éstos propietarios o de código abierto.

“Finalmente, Intergeo propiciará el que profesores y expertos en enseñanza de las matemáticas evalúen los materiales didácticos de geometría dinámica, estableciendo su adecuación al aula. Esta información, junto con otros comentarios adicionales, estará disponible para los usuarios del portal Intergeo. Los usuarios podrán también agregar sus propias evaluaciones y comentarios”.

PROGRAMAS MÁS USUALES DE GEOMETRÍA INTERACTIVA

1. Libres y gratuitos

- Geogebra, www.geogebra.org/cms/index.php?lang=es, basado en Java por lo que funciona en cualquier sistema operativo que tenga instalada la máquina virtual de Java.
- Kig <http://edu.kde.org/kig/>, para Linux
- DrGeo <http://www.ofset.org/drgeo>, para Linux
- Regla y Compás, RyC, <http://www.rene-grothmann.de/>, basado en Java.
- Geonext <http://geonext.uni-bayreuth.de/index.php?id=2453>, basado en Java.

2. Licenciados

- Cabri II Plus <http://www.cabri.com/es> para Windows y Mac.
- The Geometer's Sketchpad <http://www.keypress.com>, para Windows y Mac.
- Cinderella <http://www.cinderella.de>, basado en Java.
- Geup <http://www.geup.net/es/index.htm>, para Windows.

Para un análisis pormenorizado de los programas citados puede visitarse la interesante página <http://www.geometriadinamica.cl/blog/>.

Para una visión más somera pueden servir de referencia las páginas:

- <http://www.concepcionabraira.info/wp/category/geometria-interactiva/>
- <http://www.slideshare.net/Chiti/recursos-gd-arranz> en la que a través de una presentación se recorren algunas de las características de los programas citados.
- <http://www.divulgamat.net/> en la que siguiendo el camino “Recursos en Internet”, “Recursos didácticos en Internet”, se encuentra el artículo de Antonio Pérez Sanz de título “Programas informáticos para la enseñanza de la Geometría” en el que se comentan algunas de las características de los programas antes citados, haciendo especial hincapié en el más veterano de todos, el programa Cabri. .



ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 17 – ABRIL DE 2009

Si lo que se desea es hacer una visita o excursión por diferentes páginas de Geometría interactiva con el objeto de obtener una panorámica general de sus posibilidades los lugares a visitar son muchos, diversos y llenos de color y atractivo.

Por citar algunos:

1. De forma general, las páginas matriz de los programas antes mencionados ya que contienen ejemplos y presentaciones de sus posibilidades. Es conveniente igualmente descargar los manuales de los mismos para un estudio detallado.
2. Ya más en particular y por entresacar algunas páginas (si bien cualquiera puede encontrar infinidad de ellas simplemente tecleando en un buscador “geometría dinámica interactiva”, “actividades con cabri” etc):
 - a. La citada <http://www.geometriadinamica.cl/blog/>
 - b. <http://geometriadinamica.es/>
 - c. <http://recursos.pnte.cfnavarra.es/~msadaall/geogebra/>
 - d. <http://platea.pntic.mec.es/~ablanco/Geometría Dinámica/index.htm>
 - e. <http://centros5.pntic.mec.es/ies.marques.de.santillana/tallerma/cabri.htm>
 - f. <http://nti.educa.rcanaria.es/matematicas/GEOMETRIA/Curso Cabri/inicio.htm>
3. Finalmente, aunque no hayan sido elaborados con programas de Geometría Interactiva, en la Web existen infinidad de páginas que contienen applets generalmente programados en Java que encierran construcciones geométricas en las que algunos de los objetos presentes pueden arrastrarse con el ratón y observar los cambios que se derivan. Estas construcciones podrían rediseñarse mediante cualquiera de los procesadores geométricos. Digna de una mención especial es la página que contiene una versión virtual e interactiva de los Elementos de Euclides: <http://www.euclides.org/>.

Autoría

- Nombre y Apellidos: Patricia Pérez Ortiz
- Centro, localidad, provincia: IES Torreblanca, Sevilla, Sevilla
- E-mail: patruki957@yahoo.es