



ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 18 – MAYO DE 2008

“CONSTRUCCIÓN DE TRIÁNGULOS Y CRITERIOS DE IGUALDAD”

AUTORÍA PATRICIA PÉREZ ORTIZ
TEMÁTICA GEOMETRÍA. TRIÁNGULOS
ETAPA ESO

Resumen

Los criterios de igualdad de triángulos constituyen un tema clásico de la geometría euclídea. Los ordenadores y los programas de geometría interactiva permiten hoy día un acercamiento al mismo desde un punto de vista nuevo, dotándolo de luz propia y convirtiéndolo en un tema de investigación. El alumno afina en el mismo sus instrumentos de dibujo, precisa su lenguaje geométrico, formula hipótesis y extrae conclusiones “convincientes”.

Palabras clave

- Vértices, lados, ángulos como elementos de los triángulos.
- Movimientos en el plano: traslación, rotación y simetría.

1. INTRODUCCIÓN Y ENCAJE EN EL CURRÍCULO

“La geometría, además de definiciones y fórmulas para el cálculo de superficies y volúmenes es, sobre todo, describir y analizar propiedades y relaciones, y clasificar y razonar sobre formas y estructuras geométricas. El aprendizaje de la geometría debe ofrecer continuas oportunidades para construir, dibujar, modelizar, medir o clasificar de acuerdo con criterios libremente elegidos. Su estudio ofrece excelentes oportunidades de establecer relaciones con otros ámbitos, como la naturaleza o el mundo del arte, que no debería quedar al margen de atención.

La utilización de recursos manipulativos que sirvan de catalizador del pensamiento del alumno es siempre aconsejable, pero cobra especial importancia en geometría donde la abstracción puede ser construida a partir de la reflexión sobre las ideas que surgen de la experiencia adquirida por la interacción con un objeto físico. Especial interés presentan los programas de geometría dinámica al permitir a los estudiantes interactuar sobre las figuras y sus elementos característicos, facilitando la posibilidad de analizar propiedades, explorar relaciones, formular conjeturas y validarlas”. (Real Decreto



ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 18 – MAYO DE 2008

1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria).

La igualdad de triángulos es una de las unidades geométricas que requiere de la “*descripción y el análisis de las propiedades y relaciones, y la clasificación y razonamiento sobre formas y estructuras geométricas*”. Se entronca en el currículo de la asignatura de Matemáticas, en el primer ciclo de la ESO, y en particular en su primer curso, dentro del bloque 4 referente a la Geometría, en el apartado más genérico de los polígonos.

Tradicionalmente la metodología usada en la unidad de la igualdad de triángulos ha sido estática y expositiva. Se enumeraban sin más los criterios y se comprobaba su aplicación a casos particulares. A lo sumo se citaba de paso o implícitamente la relación de la unidad con los movimientos en el plano.

Los programas de geometría interactiva añaden una perspectiva nueva a la geometría y en particular a la unidad sobre la igualdad de triángulos. Permiten desde el principio la experimentación, el trabajo individual e invitan a la puesta en común de las hipótesis, formulaciones y elaboraciones propias. Posibilitan de una forma cómoda la colocación en el centro de la escena de los movimientos en el plano: traslaciones, giros y simetrías.

Su conexión con la disciplina de Educación Plástica y Visual de la que es un lugar común las distintas formas de construir triángulos, mientras que los criterios de igualdad de triángulos lo son de la disciplina de Matemáticas, permite poner en práctica la interdisciplinariedad.

2. MATERIAL A UTILIZAR

La unidad se presta especialmente a la utilización de determinados “*recursos manipulativos que sirvan de catalizador del pensamiento del alumno*”.

Entre ellos pueden citarse aquellos que permiten una manipulación manual como:

- Tijeras y pegamento.
- Regla, compás, escuadra, cartabón y transportados de ángulos.

Sin olvidar los referidos a las nuevas tecnologías como:

- Ordenadores
- Programas de geometría interactiva, entre los que merece una mención especial Geogebra, que es gratuito y funciona en todos los sistemas operativos al estar basado en Java..

Todos los alumnos deben disponer de un cuaderno en que anoten sus experiencias y las conclusiones a que hayan llegado.

3. CONOCIMIENTOS PREVIOS

El alumno, antes de pasar a trabajar la igualdad de triángulos, debe conocer los siguientes ítems:

C/ Recogidas Nº 45 - 6ºA 18005 Granada csifrevistad@gmail.com



ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 18 – MAYO DE 2008

- Medida directa de longitudes, sus unidades, y las operaciones, principalmente la suma, con las mismas.
- Noción de ángulos, medida en el sistema sexagesimal y sus operaciones.
- Reconocimiento de las diversas clases de polígonos, en especial de los triángulos y de sus elementos, con el objeto de disponer de un vocabulario básico: vértices, lados, ángulos.
- Conocer la propiedad: “La suma de los ángulos de un triángulo es 180° ”.
- Si el profesor desea enfocar la unidad desde la manipulación manual el alumno debe conocer el uso de la regla, el compás y el transportador de ángulos.
- Si el profesor desea hacer uso de los programas de geometría interactiva el alumno deberá conocer los rudimentos del uso del ratón a fin de seleccionar y poder arrastrar por la pantalla las figuras propuestas. La utilización de los mencionados programas será relativamente elemental no requiere de especiales habilidades.

4. OBJETIVOS

Entre los propuestos por la L.O.E. pueden señalarse especialmente:

- *Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos...*
- *Mejorar la capacidad de pensamiento reflexivo e incorporar al lenguaje y modos de argumentación las formas de expresión y razonamiento matemático...*
- *Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en la propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito y adquirir un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos y utilitarios de las matemáticas.*
- *Utilizar de forma adecuada los distintos medios tecnológicos (calculadoras, ordenadores, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.*

5. DESARROLLO

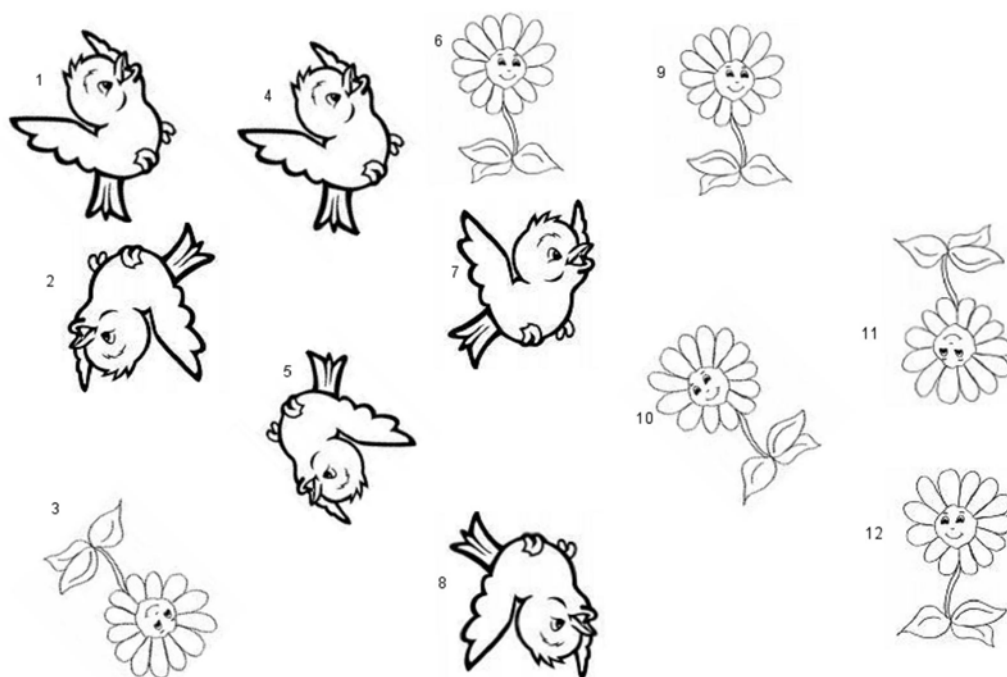
Actividad 1

En ella se proporcionará a los alumnos una hoja con diversos objetos numerados, a fin de que sea más fácil referirse a los mismos. Los objetos deben ser variados y no sólo geométricos. El objetivo de la actividad estriba en que el alumno decida cuáles de ellos son iguales y cuáles no. A fin de invitar a la

reflexión no es conveniente que los objetos sean distintos a simple vista, si no que entre algunos de ellos debe haber pequeñas diferencias, por ejemplo de tamaño.

Si se desea un enfoque manual la hoja con las figuras debería estar en formato papel y orientar al alumno hacia el recorte de las figuras y posterior superposición para ver si coinciden. Si se usa un programa de geometría interactiva la hoja con las figuras debería estar en formato virtual. Es posible que los alumnos se encuentren con dificultades añadidas al intentar superponer objetos, sobre todo si deben emplear giros o simetrías. Por ello podría ser oportuno que una parte de los alumnos utilizaran tijeras e intentaran superponer las figuras a mano y otros usaran programas informáticos.

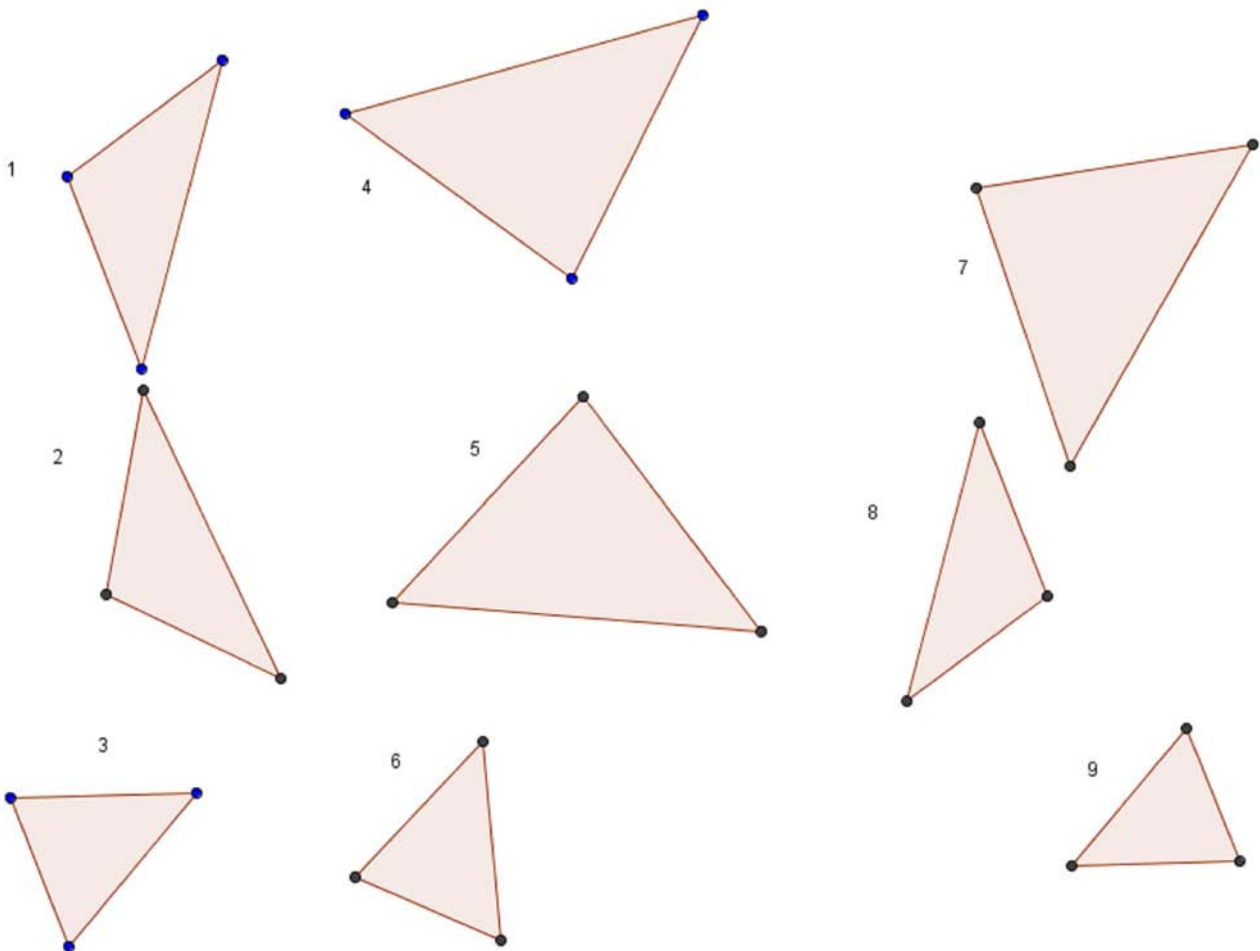
A quienes empleen métodos manuales podrían proporcionárseles dos hojas idénticas, una de las cuales sirviera en primer lugar para recortar y superponer las figuras y la otra se utilizara posteriormente para reflexionar sobre los movimientos que han sido necesarios para llegar a la superposición. Es posible que algunos alumnos lleguen a identificar los movimientos. La siguiente plantilla podría servir de modelo.



La plantilla precedente ha sido realizada con Geogebra, programa una de cuyas características más relevantes es la posibilidad de insertar y manipular imágenes predefinidas.

Actividad 2

Consistirá en una repetición de la actividad anterior, pero esta vez el trabajo se efectuaría únicamente sobre triángulos. Al ser objetos más simples es posible que los movimientos aparezcan con más claridad y sean más fácilmente distinguibles.



A partir de las traslaciones, rotaciones y simetrías deberá definirse el camino que conduce desde un objeto a otro. Los alumnos deberán llegar a plasmar en su cuaderno las siguientes definiciones:

1. Dos triángulos son iguales o congruentes si pueden superponerse.
2. Dos triángulos son iguales o congruentes si los lados y ángulos de uno de ellos son iguales a los lados y ángulos del otro.



ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 18 – MAYO DE 2008

Actividad 3: Construcción de triángulos

En la actividad se darán algunos elementos de los triángulos y el alumno deberá intentar construirlos observando si los datos proporcionados determinan el triángulo de forma única. De nuevo para la realización de esta actividad puede recurrirse a la manipulación clásica a través de las hojas de papel, el compás y el goniómetro o medidor de ángulos o bien puede hacerse uso de un programa de geometría interactiva a fin de facilitar y otorgar dinamismo a las construcciones.

Antes de proceder a la construcción de los triángulos ya sea de forma manual o virtual será necesario el dominio de dos técnicas elementales:

1. Transferencia de longitudes a partir de un punto mediante la utilización de la herramienta compás, o círculo dado su centro y su radio. (En Geogebra existe una herramienta que construye un segmento a partir de un punto y una medida, lo que permite de forma rápida construir segmentos a partir de las medidas numéricas).
2. Transferencia de ángulos a partir de un segmento o semirrecta. (En Geogebra existe una herramienta que construye un ángulo a partir de dos puntos y de la medida del ángulo en grados, lo que permite de forma rápida la visualización de ángulos y su transferencia).

Sólo una vez asimiladas las técnicas anteriores debería procederse a la construcción de triángulos desde los siguientes supuestos:

- Conocida la medida de los tres lados.
- Conocida la medida de los tres ángulos. El alumno deberá reconocer en su intento de construcción que el teorema de la suma de los ángulos de un triángulo implica que uno de los tres ángulos no es necesario.
- Conocida la medida de un lado y dos ángulos.
- Conocida la medida de dos lados y un ángulo.

En aquellos casos en que exista convencimiento compartido de que los datos suministrados determinan el triángulo de forma inequívoca el alumno deberá anotarlo en su cuaderno. La actividad podrá darse por concluida cuando se conozcan experimentalmente y se hayan formulado los siguientes hechos:

1. “Propiedad triangular” que deben cumplir los lados de un triángulo.
2. Un triángulo queda determinado si se conoce la medida de los tres lados.
3. Un triángulo queda determinado si se conoce la medida de dos lados y el ángulo comprendido.
4. Un triángulo queda determinado si se conoce la medida un lado y sus ángulos adyacentes.

Actividad 4: Criterios de igualdad de triángulos

El alumno debe buscar y copiar en su cuaderno los llamados “criterios de igualdad de triángulos”.

A continuación se procederá a su comparación con las formas de determinar los triángulos a las que ha llegado en la actividad anterior.



ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 18 – MAYO DE 2008

Una vez analizados y discutidos los tres criterios anteriores se suministrará una hoja en papel o preferentemente en formato electrónico con múltiples triángulos con objeto de clasificarlos atendiendo a los criterios de igualdad. Puede servir la misma utilizada en la actividad 2. De esta forma el alumno observará la mayor facilidad que proporcionan los criterios de igualdad de triángulos frente a la técnica de la superposición. Para averiguar si dos triángulos son iguales ya no será necesario superponerlos, sino simplemente conocer la medida de sus ángulos y lados, y ni siquiera de todos ellos.

Geogebra permite fácilmente calcular la medida de los ángulos y de los lados de los triángulos, y por ende averiguar si dos triángulos dados son iguales.

Actividad 5: Ampliaciones

1. Se puede plantear a los alumnos el siguiente problema:

Una terraza tiene la forma de un cuadrilátero irregular. Se llama a una empresa para que confeccione un toldo para sombrearla. La empresa manda a un operario para que tome medidas. ¿Qué medidas deberá tomar?

El problema no ofrece pistas para la solución. Es posible que se planteen distintas soluciones cuya idoneidad deberá ser discutida.

Ante las soluciones que se propongan sería conveniente que quien las haya formulado intente convencer con razonamientos a sus compañeros. Sin ello la solución no sería aceptada.

Una vez que se haya obtenido la solución, podría ampliarse el problema proporcionando las medidas que ha tomado el operario. Y formulando la siguiente pregunta:

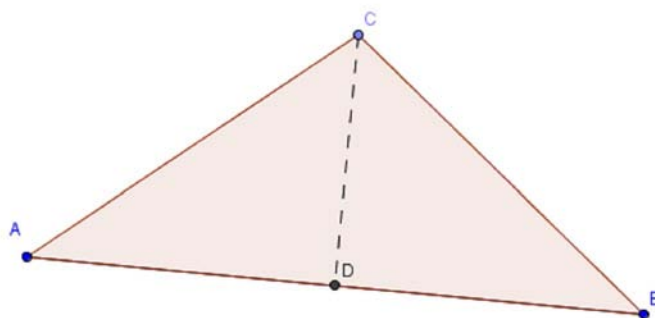
Si la empresa cobra el metro cuadrado de tela a 36€, ¿cuál será el coste del toldo?

Aunque en primero de ESO no se trabaja el cálculo de áreas de polígonos no regulares el hecho de poder confeccionar un plano de la terraza mediante un programa de geometría interactiva y servirse de éste para calcular su área proporciona al alumno una manera no ortodoxa, pero sí interesante de solucionar el problema. Y es posible que su solución no esté muy alejada de la que aplica la empresa.

2. Este segundo problema es más teórico pero de gran importancia en Geometría:

Investigar y formular criterios razonados de reconocimiento de triángulos isósceles.

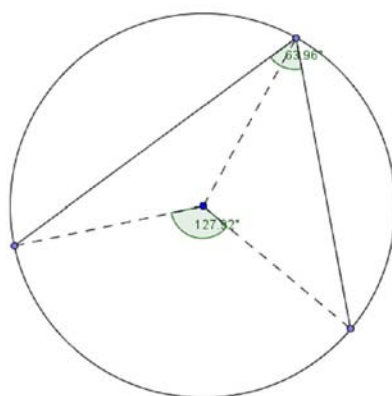
Como ayuda puede proporcionarse a los alumnos la siguiente construcción:



Con seguridad surgirán muchas propiedades de los triángulos isósceles. Conviene que el alumno las ordene, las sistematice razonadamente, formule breves razonamientos que las “demuestren”.

Como colofón el alumno deberá presentar un trabajo individual o colectivo sobre los triángulos isósceles, no olvidando en él la inclusión de los triángulos equiláteros, como un caso particular. Y buscando situaciones, por ejemplo en las circunferencias y en los polígonos regulares, en las que aparezcan los triángulos isósceles.

También se puede hacer que los alumnos presenten a sus compañeros una cuestión que han de estudiar previamente y que tenga relación con los triángulos isósceles. Sirva como ejemplo los ángulos inscritos en una circunferencia.



6. BIBLIOGRAFÍA Y PÁGINAS DE INTERNET

- La pagina de wikipedia <http://maralboran.org/wikipedia/index.php/Tri%C3%A1ngulos> en que se tratan consecutivamente la construcción e igualdad de triángulos



ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 18 – MAYO DE 2008

- El libro primero de “Los Elementos” de Euclides, del que existe una versión interactiva en http://www.euclides.org/menu/elements_esp/indiceeuclides.htm
- Las actividades sobre movimientos y construcciones con regla y compás en el plano de la biblioteca GeoClip que se abre con el programa Jclip
- La página del CNICE http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Triangulos/index_tri.htm sobre triángulos en general
- La siguiente página contiene una colección de ejercicios sobre congruencia o igualdad de triángulos <http://www.matebrunca.com/Contenidos/Matematica/Geometria/congruencia-triangulos.pdf>

Autoría

- Patricia Pérez Ortiz
- I.E.S. Torreblanca, Sevilla, Sevilla.
- E-mail: patruki957@hotmail.com