



ISSN 1988-6047

DEP. LEGAL: GR 2922/2007

Nº 18 – MAYO DE 2008

“ISOMETRÍAS”

AUTORÍA PATRICIA PÉREZ ORTIZ
TEMÁTICA GEOMETRÍA. ISOMETRÍAS
ETAPA ESO

Resumen

El estudio de las isometrías y las transformaciones en el plano es una bella forma de desarrollar muchas de las competencias, principalmente la que hace referencia a la interacción con el mundo físico y la cultural y artística. Las transformaciones geométricas están presentes en muchas creaciones artísticas (frisos, mosaicos...) así como en la naturaleza (hojas de los árboles...)

Palabras clave

Transformaciones en el plano. Traslación. Rotación. Simetría Axial. Simetría central. Homotecia.

1. INTRODUCCIÓN A LAS TRANSFORMACIONES EN GEOMETRÍA

Con frecuencia un motivo geométrico es reproducido con variaciones en los más diversos campos de la actividad humana e incluso en la misma naturaleza.

En un bosque hay muchos árboles de la misma especie que pese a encontrarse en fases distintas de crecimiento adoptan la misma forma, los árboles se componen de ramas regularmente distribuidas en distintos niveles, y las ramas tienen hojas que gozan de llamativas simetrías.

Los técnicos, artistas y diseñadores suelen elaborar sus objetos y creaciones repitiendo con variaciones aquellos motivos que consideran fundamentales.

Los pavimentos de nuestras calles siguen un esquema geométrico iterativo. En él suele residir a la vez su sencillez y belleza. Los mosaicos y cenefas que adornan los patios y monumentos repiten periódicamente un mismo motivo geométrico.

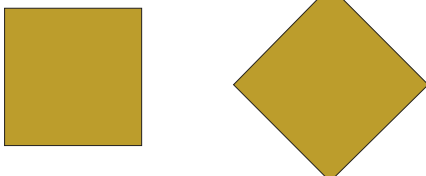
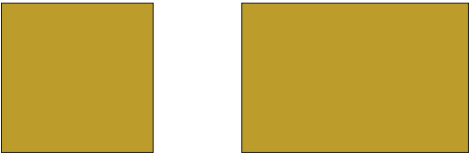
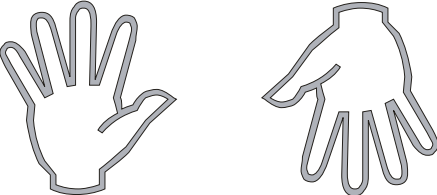
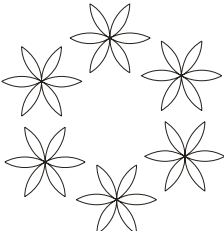
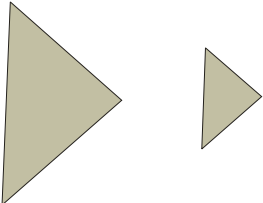
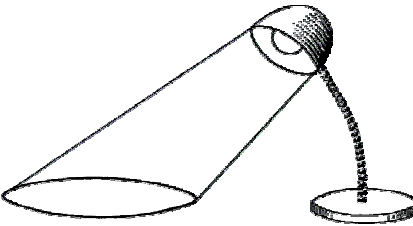
Método de trabajo:

Este es el primer acercamiento al tema, luego es importante enmarcar el tema de las transformaciones en el plano en un contexto más amplio, y detectar el conocimiento que tienen los alumnos sobre el

tema, reconocer en el entorno transformaciones geométricas aunque no sean planas y analizar las propiedades que se mantienen en las transformaciones.

Todo esto se puede llevar a cabo con una ficha parecida a la siguiente:

Analiza y estudia las figuras que siguen atendiendo a las transformaciones que puedan estar involucradas. Cuando en un misma celda aparecen dos objetos el de la izquierda se considera el original y el de la derecha el transformado. Razona especialmente si las transformaciones conservan o no la forma de los objetos y si mantienen las distancias. Intenta poner nombre a cada una de las transformaciones.



ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 18 – MAYO DE 2008

2. TRANSFORMACIONES EN EL PLANO

Nomenclatura y definiciones

1. *Transformación* en el plano es sinónimo de aplicación del plano en sí mismo. En una transformación los elementos imagen se llaman en general *homólogos* de los originales.
2. Las transformaciones que conservan la forma de los objetos (y en consecuencia los ángulos) se llaman transformaciones *isomórficas* y *anamórficas* en caso contrario. Entre las primeras revisten especial importancia los *movimientos* o *isometrías* que conservan las distancias.
3. Las transformaciones también pueden clasificarse atendiendo a si conservan o invierten la orientación de que se dote el espacio o los objetos del mismo. Las primeras se denominan *directas* e *inversas* las segundas.
4. En una transformación revisten especial importancia los objetos que se transforman en sí mismos, ya sean puntos (*puntos dobles*) u otras figuras (*invariantes*).
5. Las transformaciones pueden encadenarse, aplicando una de ellas a los elementos transformados de la otra. Este encadenamiento de transformaciones se denomina *composición* o *producto*. Si primero se aplica la transformación T y a continuación la transformación S la transformación producto se denota SoT. En general la transformación producto de transformaciones no es conmutativa. No será lo mismo la transformación SoT que ToS.
6. Si una transformación T puede deshacerse o lo que es lo mismo los objetos pueden retrotraerse a su posición original la transformación se dice *invertible* y tanto T como la que devuelve los puntos a su posición inicial se denominan *inversas* una de la otra.

Clasificación de las isometrías o movimientos en el plano:

	Directos	Inversos
Sin puntos fijos	Traslaciones	Deslizamientos
Con puntos fijos	Giros	Simetrías axiales

3. TRASLACIONES

La *traslación* de vector $\mathbf{v}$ (T_v) transforma P en P', siendo el segmento orientado PP' representante de v.

Una traslación viene determinada por cualquier par de puntos homólogos.

Una figura F' se dice que es la trasladada de otra figura F si F' se obtiene al aplicar una traslación a los puntos de F.

Resumen

Traslaciones				
	Isometría	Directa	La composición de una traslación es una traslación	Puntos dobles
Sí	X	X	X	X
No				X

Método de trabajo

La secuencia de trabajo es la siguiente:

1. Traslación de puntos.
2. Las traslaciones conservan las distancias (y en consecuencia los ángulos) así como las orientaciones.
3. Las traslaciones no tienen puntos dobles (si se exceptúa la traslación de vector nulo).
4. Las rectas se transforman en paralelas, y si su dirección contiene $\mathbf{v}$ son invariantes.
5. Composición de traslaciones
6. Traslaciones inversas.

Ejemplo visual de una traslación (Motivo del enlosado de un banco)



4. ROTACIONES

La *rotación* o *giro* de centro O y ángulo α (G_O, α) transforma P en P' , siendo

- la distancia de O a P igual a la distancia de O a P' ($d(O, P) = d(O, P')$).
- α el ángulo orientado POP' .

Las rotaciones vienen definidas por el centro y cualquier par de puntos homólogos. El centro de la rotación pertenece a la mediatriz de dos puntos homólogos.

Una figura F' se dice que es la girada o rotada de otra figura F si F' se obtiene al aplicar una rotación a los puntos de F .

Una figura plana tiene un *centro* de giro O de orden n cuando al girarla respecto a O coincide con ella misma n veces contando la posición inicial.

Resumen

Rotaciones				
	Isometría	Directo	La composición de rotaciones es una rotación	Puntos dobles
Sí	X	X	X	X
No				

Método de trabajo

La secuencia de trabajo es la siguiente:

1. Rotación de puntos.
2. Comprobación de que conservan las distancias (y en consecuencia los ángulos) así como las orientaciones.
3. Tienen un único punto doble, el centro de la rotación (si se exceptúa la rotación de ángulo 0).
4. Las circunferencias de centro el centro de rotación son invariantes.
5. Composición de rotaciones del mismo centro y de distinto centro.
6. Rotaciones inversas.

Ejemplo visual de una rotación (Flor del Ibisco)





ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 18 – MAYO DE 2008

5. SIMETRÍA CENTRAL

La *simetría central* de centro **O** (S_O) transforma un punto P en P' verificando:

- Los puntos **O**, P y P' están alineados.
- El punto **O** equidista de P y P'.

La simetría central es otro nombre para el giro de centro O y amplitud 180° .

O es el punto medio del segmento PP'.

Una simetría con centro viene determinada por cualquier par de puntos homólogos.

Una figura F' se dice simétrica respecto de O de otra figura F si F' se obtiene al aplicar la simetría de centro O a los puntos de F. Si F' y F son la misma figura ésta se dice simétrica respecto de O.

Resumen

Simetría central				
	Isometría	Directo	La composición de simetrías es una simetría	Puntos dobles
Sí				
No				

Método de trabajo

La secuencia de trabajo es la siguiente:

1. Simetría central de puntos del plano.
2. Comprobación de que conservan las distancias (y en consecuencia los ángulos) así como las orientaciones.
3. Tienen un único punto doble, el centro de simetría.
4. Las rectas que pasan por el centro son invariantes.
5. Las circunferencias de centro el centro de la simetría son invariantes.
6. Composición de simetrías centrales del mismo y distinto centro.
7. La isometría inversa de una simetría central es ella misma.

Ejemplo visual de una simetría central (Reja)



Centro de
simetría.

6. SIMETRÍA AXIAL

La *simetría axial* de eje e (S_e) transforma un punto P en P' estando

- Los puntos P y P' sobre la misma perpendicular al eje e.
- Y a la misma distancia de e.

Una simetría axial viene determinada por cualquier par de puntos homólogos, P y P'. El eje e es la mediatriz del segmento PP'.

La composición de una simetría de eje e y una traslación de vector paralelo al eje se llama *simetría con deslizamiento*.

Una figura F' se dice simétrica de otra figura F si F' se obtiene al aplicar una simetría axial a los puntos de F. Si F' y F son la misma figura se dice que tiene un eje de simetría.

Resumen

Simetría axial				
	Isometría	Directo	La composición de simetrías axiales es una simetría axial	Puntos dobles
Sí				
No				

Método de trabajo

La secuencia de trabajo es la siguiente:

1. Simetría axial de puntos.
2. Comprobación de que conservan las distancias (y en consecuencia los ángulos) y se invierte la orientación.

3. El eje es una recta de puntos dobles.
4. Las rectas perpendiculares al eje son invariantes.
5. Las circunferencias cuyo centro está en el eje de simetría son invariantes.
6. La composición de simetrías axiales de ejes paralelos es una traslación.
7. La composición de simetrías axiales de ejes secantes es un giro de centro el punto de intersección de los ejes y de amplitud el doble del ángulo definido por los ejes.
8. El movimiento inverso de una simetría axial es ella misma.

Ejemplo visual de una simetría axial (Hoja de palmera)



7. HOMOTECIAS

La *homotecia* de centro O y razón r ($H_{O,r}$) transforma un punto P en P' bajo las condiciones:

- O, P, P' están alineados.
- La distancia de O a P' es r -veces la distancia de O a P .

Una homotecia viene determinada por 2 pares de puntos homólogos no alineados.

Una figura F' se dice homotética de otra figura F si F' se obtiene al aplicar una homotecia a los puntos de F .

Resumen

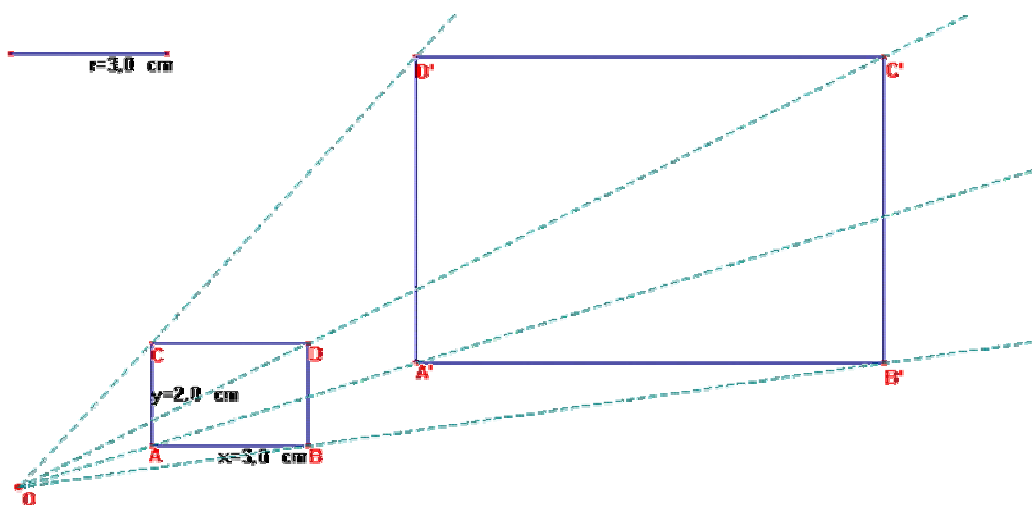
Homotecias				
	Isometría	Directo	La composición de homotecias es una homotecia	Puntos dobles
Sí	X	$r > 0$		
No		$r < 0$	X	X

Método de trabajo

La secuencia de trabajo es la siguiente:

1. Homotecia de puntos. Razón positiva y negativa. Mayor y menor que 1. Razón 1.
2. Comprobación de que no conserva las distancias, sí los ángulos.
3. Discusión sobre las orientaciones según la razón sea positiva o negativa.
4. Tienen un único punto doble, el centro de la homotecia (si se exceptúa la homotecia de razón 1).
5. Las rectas que pasan por el centro se transforman en otras rectas que también pasan por el centro.
6. Composición de homotecias del mismo centro y de distinto centro.
7. Homotecias inversas.

Ejemplo visual de una homotecia (construcción geométrica)



8. APLICACIÓN AL AULA. MOSAICOS NAZARÍES.

Como hemos dicho en la introducción, el tema de isometrías, nos permite desarrollar la competencia cultural y artística, y sobre todo teniendo en cuenta que pertenecemos a una comunidad en la que los dibujos geométricos han constituido una parte esencial de nuestra cultura,

La dinastía nazarí, descendiente de Yusuf ben Nazar, reinó en Granada desde el siglo XIII al XV. La Alhambra y Granada en general vivieron entonces una época de esplendor que ha quedado reflejada



ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 18 – MAYO DE 2008

en sus construcciones. La transformación de un polígono regular en otra figura de igual superficie produjo formas desconocidas hasta entonces en la historia del Arte.

La construcción de casi todos éstos mosaicos está basada tomando como polígono base el cuadrado, en éste sentido podemos decir que, La Alhambra, es el reino del cuadrado, lo encontramos de forma explícita en azulejos que recubren las paredes y otras veces los cuadrados quedan ocultos tras otras formas.

9. BIBLIOGRAFÍA Y PÁGINAS DE INTERNET

Aparte de libros de texto y de materiales didácticos elaborados por mi, para escribir este artículo se han utilizado los siguientes enlaces:

<http://www.educa.rcanaria.es/matematicas/Geometria/Actividades/Transformaciones/index.htm>

<http://w3.cnice.mec.es/eos/MaterialesEducativos/mem2003/movimientos/>

Autoría

- Nombre y Apellidos: Patricia Pérez Ortiz
- Centro, localidad, provincia: IES Torreblanca, Sevilla, Sevilla
- E-mail: patruki957@yahoo.es