



ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 19 – JUNIO DE 2009

“TRIGONOMETRÍA EN EL AULA”

AUTORÍA CATALINA PONCE HUERTAS
TEMÁTICA MATEMÁTICAS
ETAPA ESO

Resumen

El estudio de la Geometría en la ESO responde a una finalidad principal, que el alumnado adquiera, por sí mismo, la convicción de que, con las herramientas de la geometría se hacen modelos que representan el espacio físico el que transcurre la vida cotidiana y que, por consiguiente, muchos problemas relacionados con ese espacio físico admiten una resolución geométrica.

Por ello, es necesario que estas enseñanzas ocurran en contextos útiles y funcionales en la vida cotidiana de los ciudadanos, de manera que generen aprendizajes significativos.

Otra ventaja, a la hora de motivar al alumnado es que la Geometría es una disciplina que necesita de una reducida cantidad de requisitos previos a la hora de trabajar en el aula y por tanto resulta accesible a todo el alumnado. Pero a pesar de ello, la trigonometría concretamente no le resulta fácil a la mayor parte del alumnado, por lo que se debería de incidir en las deducciones geométricas de los nuevos conceptos con el fin de que el alumnado logre una mayor comprensión del tema, evitando que se aprenda muchas fórmulas sin llegar a entenderlas.

Palabras clave

Razones trigonométricas

Resolución de triángulos

Área de un triángulo



ISSN 1988-6047

DEP. LEGAL: GR 2922/2007

Nº 19 – JUNIO DE 2009

1. INTRODUCCIÓN

La palabra trigonometría proviene del griego, es la composición de las palabras griegas trigonon, que significa triángulo y metron, que significa medida, es decir trigonometría no es más que la medida de triángulos.

Su origen se atribuye a Hiparco, con el estudio de algunas de las relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo. También contribuyeron a la consolidación la trigonometría Ptolomeo y Aristarco de Samos con sus estudios astronómicos, Pitiscus desarrollando métodos para la resolución de triángulos, Viète aportando fórmulas trigonométricas de ángulos múltiples, Neper y Euler, que hizo de la trigonometría una ciencia aparte de la astronomía convirtiéndola en una rama de las matemáticas.

2. ALUMNADO AL QUE VA DIRIGIDO:

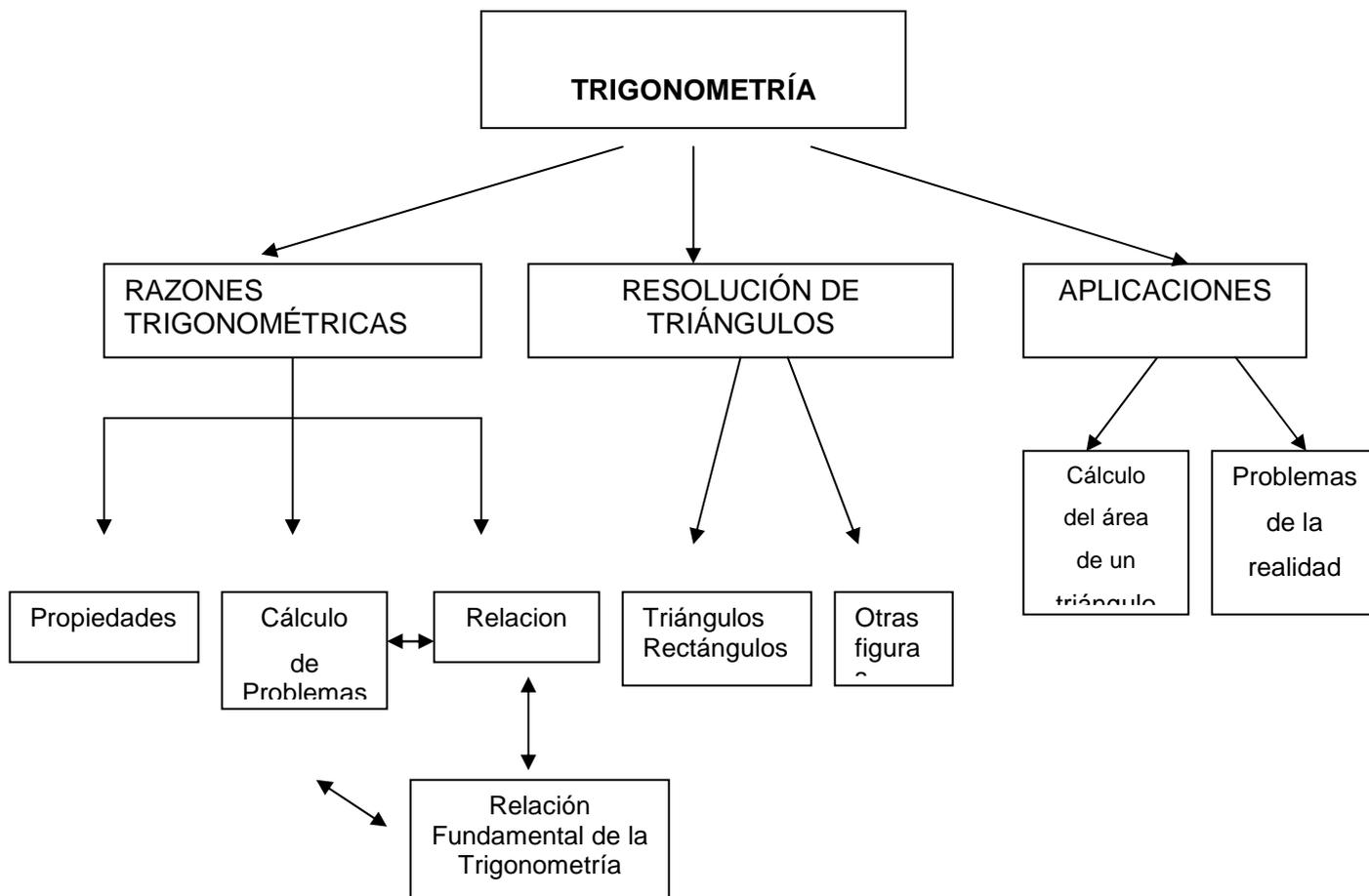
El conjunto de actividades que se desarrollan están propuestas para el alumnado de 4º de Enseñanza Secundaria Obligatoria, y será muy importante delimitar claramente los objetos geométricos con los que se va a trabajar, aunque el alumnado de este curso debe tener una idea intuitiva de muchos de estos objetos, como punto, recta, plano, segmento, ángulo,....

3. RECURSOS EN EL AULA

La trigonometría se engloba en el bloque de Geometría, y su estudio es posterior al de “Movimientos en el Plano”, lo que nos servirá de base para ahondar en las razones trigonométricas como razones entre los lados de triángulos rectángulos semejantes, no obstante, sería conveniente repasar propiedades básicas como la suma de los ángulos de un triángulo o las relaciones entre las longitudes de sus lados, etc.

Es conveniente que el alumnado tenga una visión clara de lo que se va a estudiar y la relación entre los diversos conceptos, por ello sería necesario proporcionarles un mapa conceptual, donde aparezcan todos los contenidos a estudiar y su relación entre ellos:

MAPA CONCEPTUAL



OBJETIVOS DEL ESTUDIO:

1. Definir las razones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo, estableciendo proporciones entre los lados.
2. Demostrar las propiedades de razones trigonométricas.
3. Utilizar la calculadora para obtener valores de las razones trigonométricas y para obtener los ángulos, conocida la razón trigonométrica.
4. Hallar la relación entre las razones trigonométricas de dos ángulos complementarios, suplementarios u opuestos.
5. Demostrar la fórmula fundamental de la trigonometría y aplicarla a la resolución de situaciones problemáticas.
6. Calcular las razones trigonométricas exactas de 30°, 45° y 60°.



ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 N° 19 – JUNIO DE 2009

7. Aplicar estrategias personales para resolver problemas que relacionan ángulos y longitudes y valorar su idoneidad.
8. Resolver triángulos rectángulos aplicando las razones trigonométricas.
9. Expresar un enunciado o una idea utilizando el lenguaje geométrico relativo a la semejanza y a las razones trigonométricas.
10. Resolver situaciones problemáticas de la vida cotidiana aplicando las propiedades de las razones trigonométricas.
11. Cuantificar la realidad a través de procedimientos indirectos de medida de distancias y ángulos, mediante la trigonometría.

CONTENIDOS:

Conceptuales:

- Teorema de Pitágoras.
- Razones trigonométricas de un ángulo agudo.
- Propiedades de las razones trigonométricas.
- Relación Fundamental de la Trigonometría.
- Razones trigonométricas de dos ángulos complementarios, suplementarios u opuestos.
- Resolución de triángulos rectángulos.
- Área de un triángulo en función del seno de uno de sus ángulos.
- Resolución de problemas geométricos y reales.

Procedimentales

- Estimación de la medida aproximada de los tres ángulos de un triángulo.
- Aplicación del Teorema de Pitágoras para calcular los lados de un triángulo rectángulo.
- Distinción de las razones trigonométricas (seno, coseno y tangente) de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo, y calcularlas a partir de datos dados en distintos contextos.
- Demostración de las propiedades de las razones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo
- Utilización de la calculadora para hallar ángulos y razones trigonométricas.
- Búsqueda de los valores exactos de las razones trigonométricas de los ángulos 30° , 45° y 60° .
- Utilización del Teorema de Thales para obtener y comprobar relaciones métricas entre los elementos de una figura o entre figuras geométricas.
- Utilización de los instrumentos de medida y de dibujo para resolver todo tipo de triángulos.



ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 19 – JUNIO DE 2009

- Aplicación de las razones trigonométricas fundamentales a la resolución de situaciones problemáticas de la vida cotidiana.
- Cálculo del área de un triángulo a partir de alguno de sus elementos.
- Aproximación de los valores de una magnitud según la precisión requerida dependiendo del contexto del problema.
- Análisis de figuras geométricas mediante su descomposición en triángulos rectángulos.
- Cálculo de ángulos centrales, arcos y radios en una circunferencia, utilizando las razones trigonométricas.

Actitudinales

- Reconocimiento de la utilidad del lenguaje geométrico para representar y resolver problemas de la vida cotidiana.
- Sensibilidad e interés por la información de carácter geométrico reconociendo su presencia en la naturaleza, en la arquitectura, etc.
- Valoración de la utilización de la calculadora en los cálculos relativos a razones trigonométricas.
- Curiosidad e interés por investigar relaciones trigonométricas en las figuras y los cuerpos geométricos.
- Confianza en las propias capacidades para resolver situaciones problemáticas aplicando la trigonometría.
- Respeto a las estrategias de resolución distintas de las propias.
- Gusto por la presentación ordenada y clara de los trabajos geométricos.

COMPETENCIAS BÁSICAS A DESARROLLAR

- **Competencia Matemática**
Dominar los conceptos de la trigonometría como herramienta básica en el estudio de la Geometría.
- **Comunicación lingüística**
Saber extraer la información trigonométrica que se encuentra en un texto dado.
- **Competencia en el conocimiento e interacción con el mundo físico**
Saber usar la trigonometría para resolver problemas de la vida cotidiana.
- **Competencia para aprender a aprender**
Ser consciente de la utilidad de la trigonometría a la hora de describir multitud de fenómenos.
- **Autonomía e iniciativa personal**
Deducir multitud de fórmulas trigonométricas a partir de un pequeño conocimiento teórico.



ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 19 – JUNIO DE 2009

EDUCACIÓN EN VALORES

- **Educación moral y cívica:** Se potenciará la solidaridad con la colaboración y la tolerancia a través de actividades grupales con el alumnado.
- **Educación vial:** Se podrá realizar actividades con triángulos de señales de tráfico, abriendo así un debate con el alumnado sobre la importancia de adquirir conductas y hábitos de seguridad vial como peatones y usuarios de vehículos. También se podrá reflexionar en común sobre los accidentes de tráfico: las causas, cómo evitarlos ..., sobre problemas derivados de la circulación de vehículos, como los atascos, la contaminación, etc.
- **Educación multicultural:** tratando la medición de la Pirámide de Keops, realizada por Thales de Mileto. Aparecen así dos civilizaciones muy importantes: la egipcia y la griega. Se puede señalar su importancia en la construcción de una cultura común europea y en el proceso de desarrollo científico y técnico y se podrá asimismo señalar la importancia del desarrollo de actitudes de respeto y colaboración con personas de culturas diferentes.

METODOLOGÍA

Se propone al alumnado la realización de actividades, donde el docente irá observando el trabajo del alumnado para ser un guía del proceso de enseñanza y aprendizaje realizando preguntas para conocer si se están alcanzando los objetivos propuestos.

Tareas que se proponen para la adquisición de los contenidos:

En cuanto a las tareas que se proponen para trabajar la trigonometría en el aula es conveniente dar al alumnado algunas aplicadas a contextos reales para que éste pueda ver y entender mejor la utilidad de la trigonometría.

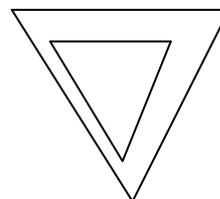
Actividad 1.-

- a) Si dos ángulos de un triángulo miden 60° y 40° , ¿podemos saber la medida del tercer ángulo?
- b) ¿Cuánto suman los ángulos de un triángulo?
- c) ¿Puede haber un triángulo cuyos lados midan 5m, 7m y 13m? ¿Y 5m, 7m y 12m? Razona tus respuestas.
- d) ¿Qué relación tienen que cumplir los lados de un triángulo? ¿Por qué?
- e) ¿Es rectángulo el triángulo de lados 6m, 8m y 10m? ¿Y el que tiene lados de longitudes 3m, 4m y 6m?
- f) ¿Qué teorema conoces acerca de los triángulos rectángulos?

Actividad 2.-

La señal de ceda el paso es un triángulo equilátero.

- ¿Cuánto miden cada uno de sus ángulos?



- Dibuja la señal y divídela en dos triángulos rectángulos trazando una mediatriz. ¿Cuánto miden los ángulos de esos triángulos rectángulos?

- ¿Influye el tamaño del triángulo en las dimensiones de esos ángulos?

Actividad 3.- Expresa en grados sexagesimales los siguientes ángulos dados en radianes:

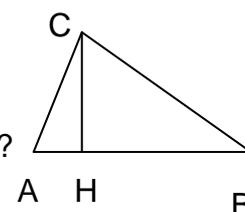
- a) $\pi / 5$ b) $\pi / 6$ c) $\pi / 4$ d) $5\pi / 9$ e) $7\pi / 18$

Actividad 4.- Expresa en radianes los siguientes ángulos dados en grados sexagesimales:

- a) 1° b) 90° c) 180° d) 135° e) 210°
 f) 300° g) 225° h) 330° i) 360° j) 60°

Actividad 5.- Se sabe que la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 5cm, y uno de los catetos mide 3 cm. ¿Cuánto mide el otro cateto?

Actividad 6 .- De un triángulo acutángulo ABC conocemos la altura CH, que mide 4cm, el lado AC, 3 cm y el lado BC, 6 cm ¿Cuánto mide el otro lado?



Calcula su área.

Actividad 7.- Santi está de acampada con unas amigas y amigos. La tienda de campaña es de forma cónica, el radio de la base mide 1m y desde el vértice hasta el suelo, or fuera, hay 2m. ¿Cabrá Santi de pie en el centro de la tienda si él mide 1'60m?

Actividad 8.- En un triángulo rectángulo ABC de catetos $b = 3$ cm, $c = 4$ cm, halla las razones trigonométricas de los ángulos B y C con la ayuda de la calculadora.

Actividad 9.- ¿Qué obtienes al dividir el seno de un ángulo entre el coseno?

Actividad 10.- Halla el seno, coseno y tangente de 2.500° , reduciendo previamente el ángulo a uno menor de 360° (es decir, **reduciendo al primer giro**).

Actividad 11.- ¿En qué cuadrante se encuentra situado un ángulo x si su tangente es positiva y su seno es negativo?

Actividad 12.- Indica el signo que tienen las razones trigonométricas de los siguientes ángulos identificando el cuadrante en el que se encuentran.

- a) 175° b) 66° c) -18°
 d) 520° e) -210° f) 1025°

Actividad 13.- Utiliza la calculadora para obtener el seno, coseno y la tangente redondeados a las milésimas de los siguientes ángulos:

- a) $48^\circ 50'$ b) 90° c) $125^\circ 50'$ d) 270°

Actividad 14.- Calcula los ángulos agudos que cumplen:



ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 19 – JUNIO DE 2009

a) $\sin x = 1$ b) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ c) $\cos x = -0'5$

Actividad 15.- Si $\sin x = -1/5$ y x pertenece al cuarto cuadrante, calcula el $\cos x$ y $\operatorname{tg} x$.

Actividad 16.- Determina la altura de un árbol si desde un punto situado a 20m de su base se observa su copa con un ángulo de $65^\circ 23'$.

Actividad 17.- Con un compás cuyos brazos miden 12cm se traza una circunferencia de 5cm de diámetro. Calcula el ángulo que forman sus brazos.

Actividad 18.- Si $\cos A = 0'42$, ¿cuál es el valor de $\sin A$?

Actividad 19.- Sabemos que $\cos A = 0'6$. Halla $\operatorname{tg} A$.

Actividad 20.- Comprueba los valores de las razones trigonométricas anteriores por medio de la calculadora: en ella te aparecerán los valores aproximados de las raíces.

Actividad 21.- Divide los dos miembros de la relación fundamental de la trigonometría por $\sin^2 \alpha$ y deduce la siguiente igualdad:

$$1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha = \operatorname{Cosec}^2 \alpha$$

Actividad 22.- Dibuja un triángulo equilátero ABC. Traza la altura AD desde el vértice A. Utilizando esa figura, calcula el valor de $\sin 30^\circ$ y de $\sin 60^\circ$.

Actividad 23.- Utilizando la figura del ejercicio anterior obtén el valor del coseno y la tangente de los ángulos 30° y 60° .

Actividad 24.- En cada uno de los siguientes casos, calcula el resto de las razones trigonométricas del ángulo C, sabiendo que:

- a) $\cos C = 0'38$ b) $\operatorname{tg} C = 0'68$ c) $\cos C = 1'2$
d) $\sin C = 0'75$ e) $\cos C = 0'81$ f) $\operatorname{tg} C = 1'75$
g) $\operatorname{tg} C = 3'8$ h) $\sin C = 1'1$

Actividad 25.- Sabemos que $\sin B = 0'57$. Calcula el resto de las razones trigonométricas del ángulo B utilizando las relaciones entre ellas. Comprueba los resultados hallando mediante la calculadora el valor de B, y luego el resto de las razones.

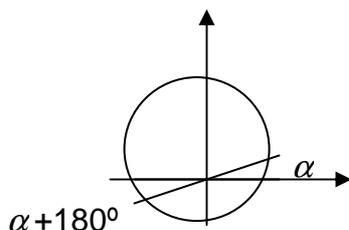
Actividad 26.- Divide los dos miembros de la relación fundamental de la trigonometría por $\cos^2 \alpha$ y deduce la siguiente igualdad:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha$$

Actividad 27.- ¿En qué cuadrante se encuentra situado el ángulo α si su tangente es positiva y su seno es negativo?

Actividad 28.- Halla las demás razones trigonométricas de un ángulo α sabiendo que $\operatorname{tg} \alpha = -3$. Determina con la calculadora de qué ángulo se trata.

Actividad 29.- Observa la figura y obtén el valor de las siguientes razones en función del $\text{sen } \alpha$, $\text{cos } \alpha$ y $\text{tg } \alpha$, respectivamente.



- a) $\text{sen}(180^\circ + \alpha)$
- b) $\text{cos}(180^\circ + \alpha)$
- c) $\text{tg}(180^\circ + \alpha)$

Actividad 30.- Si $\text{sen } \alpha = 3/4$ y α es un ángulo agudo, halla sin utilizar la calculadora:

- a) $\text{sen}(90^\circ - \alpha)$
- b) $\text{cos}(180^\circ - \alpha)$

Actividad 31.- Dibuja un cuadrado ABCD de lado 1 cm y traza la diagonal AC. Considera los triángulos rectángulos ABC y ADC.

- a) Halla los lados y la medida de los ángulos de los dos triángulos dibujados.
- b) Utilizando la figura calcula el valor de $\text{sen } 45^\circ$, $\text{cos } 45^\circ$ y $\text{tg } 45^\circ$.

Actividad 32.- Estamos haciendo volar una cometa y en un momento de fuerte viento llegamos a desenrollar los 100m de hilo que tenemos. Si entonces el ángulo que forma el hilo con el suelo es de 60° , ¿a qué altura hemos conseguido elevar la cometa?

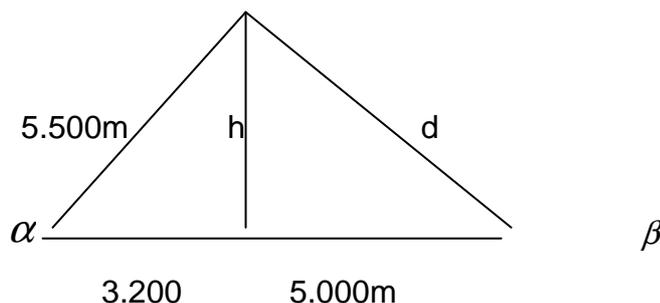
Actividad 33.- En un momento dado los rayos del sol tienen una inclinación de 50° y la sombra de un árbol mide 9m. ¿Cuál es la altura del árbol?

Actividad 34.- La base de un triángulo isósceles mide 9m, y cada uno de los lados iguales, 20cm. Halla los ángulos y el área de un triángulo.

Actividad 35.- De un triángulo rectángulo conocemos sus catetos: 6cm y 8cm. Halla, aplicando las razones trigonométricas, la hipotenusa. ¿Podrías calcular esa altura de alguna otra forma?

Actividad 36.- La distancia entre las dos puntas de un compás es de 6cm y el ángulo que forman es de 40° . ¿cuál es la longitud de cada una de las ramas?

Actividad 37.- Halla la altura a la que vuela el avión, el valor de los ángulos α y β , y la distancia d.



Actividad 38.- Una buhardilla con planta cuadrada y de lado 10m está cubierta con un tejado piramidal regular de modo que sus caras forman un ángulo de 50° con el plano horizontal. ¿cuánto costará la construcción del tejado a razón de 50 euros el metro cuadrado?

Actividad 39.- Puentes de Sevilla.

a) **El Puente del Alamillo**

El ***Puente del Alamillo*** es una de las construcciones realizadas en Sevilla con motivo de la Exposición Universal de 1992. Diseñado y construido *entre 1989 y 1992* por el arquitecto **Santiago Calatrava**.

El puente tiene figura de arpa y un sólo brazo soporta todo su peso. Tiene *140 metros de altura* con una inclinación *de 58°* , del que parten una pareja de tirantes que lo sujetan (*de 300 m. de longitud, los más largos del mundo*) y salvan una luz *de 200 metros*. Para su construcción se empleó una de las mayores grúas de tierra del mundo, capaz de elevar *200 Tm. a 150 m.* de altura. El proyecto inicial fue realizar un puente igual que mirase en sentido contrario, en el otro margen del río; pero por motivos de presupuesto sólo alcanzó para uno. El ojo de la cabeza de caballo sirve como mirador.



¿Qué distancia hay entre el pie de la altura y el otro extremo del puente? ¿Qué longitud tiene el puente (la base)?

b) **El Puente de la Barqueta**

El **Puente de la Barqueta**, cuyo verdadero nombre es Puente Mapfre, al ser la entidad que lo financió, fue construido *entre 1989 y 1992* como acceso al recinto de la Exposición Universal. Fue diseñado por los ingenieros **Juan J. Arenas y Marcos J. Pantaleón** como un puente colgante, cuenta con un sólo ojo apoyado de orilla a orilla. Su único arco es de acero atirantado por el propio tablero, *mide 214 metros*, salvando una luz libre *de 168 metros* sin apoyos intermedios y con un ancho *de 21,40 m.* Fue construido en tierra y girado hasta su emplazamiento. En su montaje definitivo, uno de los extremos se desenganchó y volvió al río.



Si el diámetro de la circunferencia a la que pertenece el arco fuera de 270m, ¿cuánto medirá dicho arco?

RECURSOS Y MATERIALES NECESARIOS

Para trabajar la Trigonometría en el aula los recursos necesarios serán:

- Material didáctico específico de geometría: regla, transportador, compás, escuadra, cartabón, etc.
- Material audiovisual que facilitará la comprensión de conceptos.
- Programas informáticos como “Cabri Geometre”.

BIBLIOGRAFÍA

COXETER, H.S.M. Fundamentos de Geometría. Editorial Limusa. México. 1988.

MARTÍNEZ, J. Elementos de Matemáticas. Valladolid. 1969.

GOLOVINA, L.I. Álgebra lineal y algunas de sus aplicaciones. Editorial Mir. Moscú. 1980

Autoría

- Nombre y Apellidos: CATALINA PONCE HUERTAS
- Centro, localidad, provincia: I.E.S. ANTONIO GALA. PALMA DEL RÍO. CÓRDOBA
- E-mail: catiph12@hotmail.com