ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 19 JUNIO 2009

"APLICACIONES DE UN CONCEPTO MATEMÁTICO LA ORIENTABILIDAD"

AUTORIA
MARÍA JOSÉ ALFONSO GARCÍA
TEMÁTICA
GEOMETRÍA
ETAPA
UNIVERSIDAD

Resumen

Los conceptos de izquierda y derecha que tanto utilizamos son consecuencia de una propiedad Matemática del espacio en que vivimos: la orientabilidad. El concepto de superficie orientable es complejo, sin embargo se puede introducir de forma intuitiva para pasar a su formalización a través de la teoría matemática. Finalmente muchos de los conceptos matemáticos han tenido sus aplicaciones técnicas en la sociedad actual como veremos a continuación.

Palabras clave

- Superficies orientables
- Cartografía
- Superficies no orientables
- Banda de Moebius
- Botella de Klein
- Aplicaciones

1. INTRODUCCIÓN

Una de las aplicaciones de los determinantes es la orientación en un espacio vectorial real.

Podemos introducir los conceptos de espacios orientables y no orientables intuitivamente a través de la observación o de experimentos realizados con lápiz y papel tanto en el caso de la recta como en el plano.

Así en una recta vectorial real hay dos orientaciones coincidiendo con los dos posibles sentidos. Podemos "representar" una orientación eligiendo un vector no nulo $\vec{v}$ (una base de la recta vectorial), entonces - $\vec{v}$ representa la otra orientación.

Sin embargo, el plano vectorial es más complejo y se puede hablar de "un sentido de giro" y de su opuesto.

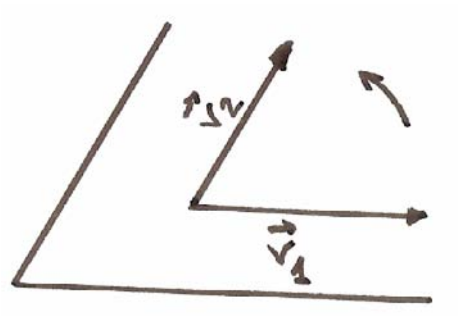
Un sentido de giro viene dado al considerar una base ordenada B= $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ de forma que se elige el sentido de giro tal que primero encontramos a $\vec{v}_1$ y luego a $\vec{v}_2$.

La base ordenada $\{\vec{v}_2, \vec{v}_1\}$ representa el sentido de giro inverso.

Se tiene que $\det_B(\vec{v}_2, \vec{v}_1) < 0$, así el determinante de los vectores de una base ordenada según la otra, indica si dos bases ordenadas representan la misma orientación.

INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS — REVISTA DIGITAL

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 19 JUNIO 2009



A partir de lo anterior llegamos a la definición abstracta de orientación, que concretamos para los espacios vectoriales reales bidimensionales:

2. ORIENTACIÓN EN UN ESPACIO VECTORIAL REAL BIDIMENSIONAL.

Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de todas las bases ordenadas de V_2 ($\mathbb{R}$). Vamos a definir en $\mathcal{C}$ una relación de equivalencia.

Si B= $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ y B´ = $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ diremos que B $\sim$ B´ si y sólo si det M (1_V, B´, B) > 0

donde M (1_V, B´, B) es la matriz del cambio de base obtenido al expresar los vectores de B´ como combinación lineal de los de B.

Esta relación de equivalencia permite definir el conjunto cociente

$\mathcal{C} / \sim$ = { c (B) / B $\in \mathcal{C}$ } donde c (B) es la clase de equivalencia representada por B.

Este conjunto cociente tiene sólo dos elementos.

Se comprueba que dadas B= $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ y B´ = $\{-\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ de forma que B no está relacionada con B´.

Por lo menos las clases de equivalencia c (B) y c (B´) son dos elementos distintos de $\mathcal{C} / \sim$ y dada B´´ otra base ordenada cualquiera se tiene que o bien B´´ $\sim$ B o bien B´´ $\sim$ B´.

<u>Definición</u>: Una orientación de V_2 ($\mathbb{R}$) es cualquiera de las dos clases de equivalencia de $\mathcal{C} / \sim$

Si tomamos una orientación c (B) a todas las bases ordenadas que representen tal clase se les llama bases ordenadas positivamente; a cualquier otra base ordenada que represente a la otra clase de equivalencia se le llama base ordenada negativamente.

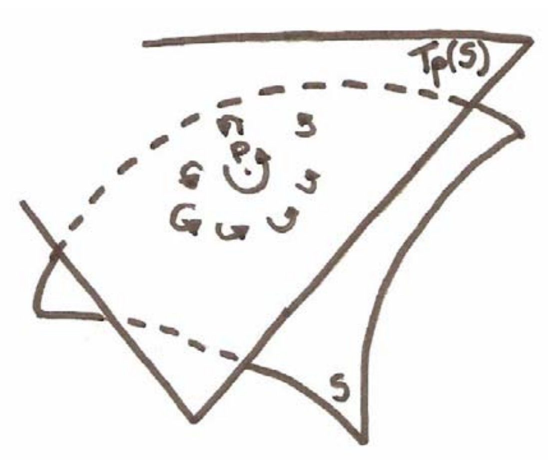
ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 19 JUNIO 2009

Un espacio vectorial orientado es un par (V_2 (R), c (B)) donde V_2 (R) es un espacio vectorial real y c (B) una orientación suya.

3. ORIENTACIÓN DE SUPERFICIES

Cada punto p de una superficie regular tiene un plano tangente T_p (S), la elección de una orientación de T_p (S) induce una orientación en un entorno de p, es decir, una noción de movimiento positivo a lo largo de curvas cerradas suficientemente pequeñas encerrando a cada punto del entorno.

Si es posible hacer esta elección para cada p $\in$ S de forma que en la intersección de dos entornos cualesquiera la orientación coincida, diremos que S es orientable. Si esto no es posible, S se denomina no orientable.



4. LA ESFERA

La esfera es una superficie orientable lo que ha permitido idear varios sistemas para trasladar la superficie esférica del Globo Terrestre al plano.

Todos los sistemas se basan en el concepto de proyección sobre un plano y que la esfera es una superficie orientable, dando lugar a los distintos tipos de proyecciones cartográficas.

4.1. Cartografía

La **cartografía** es la ciencia que se encarga del estudio y de la elaboración de los mapas.

4.2. Conceptos de cartografía

Definiremos algunos términos que ayudan a la comprensión del conjunto de líneas que permitirán determinar la situación de un punto sobre la superficie terrestre.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 19 JUNIO 2009

Se denomina mapa a la representación, en tamaño menor y en una superficie plana, de toda o parte de la superficie del Globo Terrestre.

La relación entre la imagen disminuida que se escoge y el tamaño verdadero de la parte representada viene expresada por la escala.

Se denomina eje de la Tierra a la línea imaginaria que la cruza de norte a sur y alrededor de la cual se considera que gira el planeta.

Ecuador es el círculo máximo del Globo Terrestre, perpendicular al eje de la Tierra y equidistante entre los dos polos, dividiendo a la Tierra en el Hemisferio Norte y el Hemisferio Sur.

Los Trópicos son círculos paralelos al Ecuador, situados a 23º 27´ de latitud al norte (Trópico de Cáncer) y al sur (Trópico de Capricornio) de éste.

A los semicírculos máximos (180º), cuyos extremos coinciden con los polos, se les denomina meridianos. Todos los meridianos tienen dirección norte-sur. Su número es infinito, aunque para su representación en un mapa se seleccionan separados por distancias iguales (111 km).

Los paralelos son círculos menores obtenidos por la intersección del Globo con planos paraelos al Ecuador. Su separación es constante. Siempre van de Oeste a Este. Cortan a los meridianos formando un ángulo esférico recto.

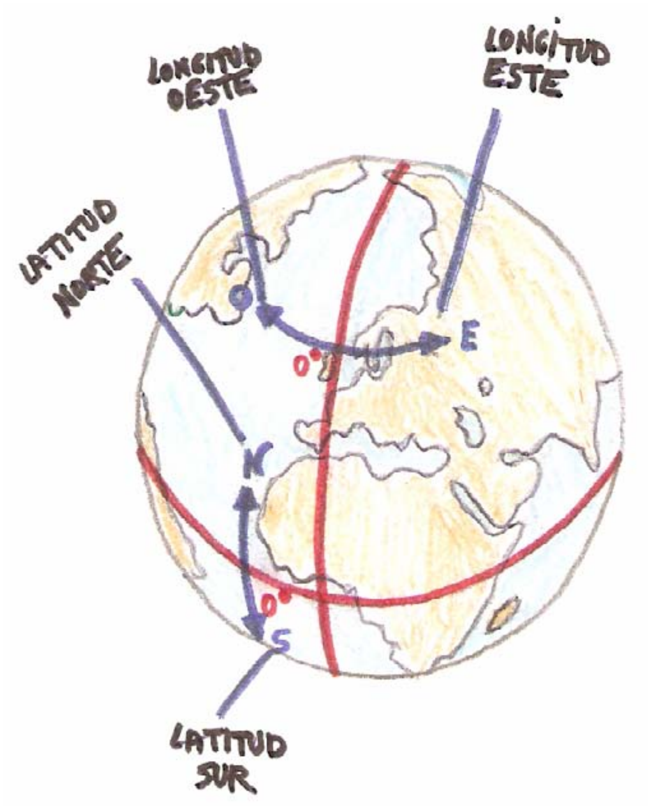
Se denomina longitud al ángulo que forma el plano del meridiano de un lugar con el plano del meridiano de origen (Greenwich). Es decir, es la distancia de derecha a izquierda del meridiano de origen o meridiano 0 al meridiano del lugar dado. La longitud oscila entre 0º y 180º al E o al W.

La latitud es la distancia angular que existe entre un punto cualquiera de la superficie terrestre y el Ecuador, o distancia por encima o por debajo del Ecuador contada en grados de meridiano. Puede oscilar entre 0º en el Ecuador y 90º en los polos.

Cualquier punto del Globo puede situarse con referencia a dos líneas fijas, el Ecuador y el Meridiano 0, es decir, dando su longitud y su latitud.

REVISTA DIGITAL INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 19 JUNIO 2009



5. LA BANDA DE MOEBIUS

La **banda de Moebius** o **cinta de Moebius** es una superficie con una sola cara y un solo borde. Tiene la propiedad matemática de ser un objeto no orientable. Fue co-descubierta en forma independiente por los matemáticos alemanes August Ferdinand Möbius y Johann Benedict Listing en 1858.

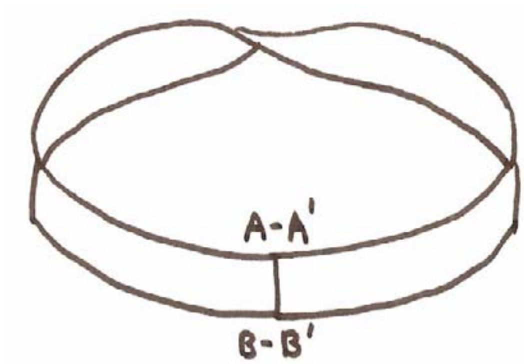
5.1. Construcción de una cinta de Möbius

1º) Se recorta una tira rectangular de papel.

2º) Uno de los extremos se gira 180º.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 19 JUNIO 2009

3º) Los extremos libres se pegan.



5.2. Propiedades

La banda de Moebius tiene las siguientes propiedades:

- Tiene sólo una cara: si se colorea la superficie de una cinta de Moebius, comenzando por la "aparentemente" cara exterior, al final queda coloreada toda la cinta, por tanto, sólo tiene una cara y no tiene sentido hablar de cara interior y cara exterior.

- Tiene sólo un borde: lo que se puede comprobar siguiendo el borde con un dedo, notando que se alcanza el punto de partida habiendo recorrido "ambos bordes", por tanto, sólo tiene un borde.
- Esta superficie no es orientable: Una persona que se desliza tumbada sobre una banda de Moebius, mirando hacia la derecha, al dar una vuelta completa aparecerá mirando hacia la izquierda. Si se parte con una pareja de ejes perpendiculares orientados, al desplazarse paralelamente a lo largo de la cinta, se llegará al punto de partida con la orientación invertida.

5.3. Un descubrimiento útil

El interés que suscitó la banda de Moebius transcendió el marco puramente matemático y encontró interesantes aplicaciones industriales y técnicas que han dado lugar a más de una docena de patentes.

Por ejemplo:

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 19 JUNIO 2009

- Una película que se puede grabar por las dos caras, invento que se aplicó también a las cintas magnetofónicas.
- Cintas transportadoras que se ven sometidas a la mitad del desgaste usual.
- Cintas de material abrasivo que duran el doble que las del tipo convencional.

Además han sido diversos los artistas que han tomado la banda de Moebius como fuente de inspiración para sus creaciones, como es el caso de una escultura instalada en la localidad de Daejeon (Corea). O del símbolo internacional de Reciclaje que es una banda de Moebius.

La banda de Moebius ha seducido incluso al mundo del cine. En 1959, Deutsch escribió el libro "A subway called Moebius", en el que un metro desaparece de la red topológica de sus estaciones pasando "al otro lado del espejo" como si la red viaria se hubiese convertido en una cinta de Moebius. En 1996, la Universidad del Cine de Buenos Aires produjo la película Moebius, dirigida por Gustavo Mosquera, basada en el libro de Deutsch.

6. LA BOTELLA DE KLEIN

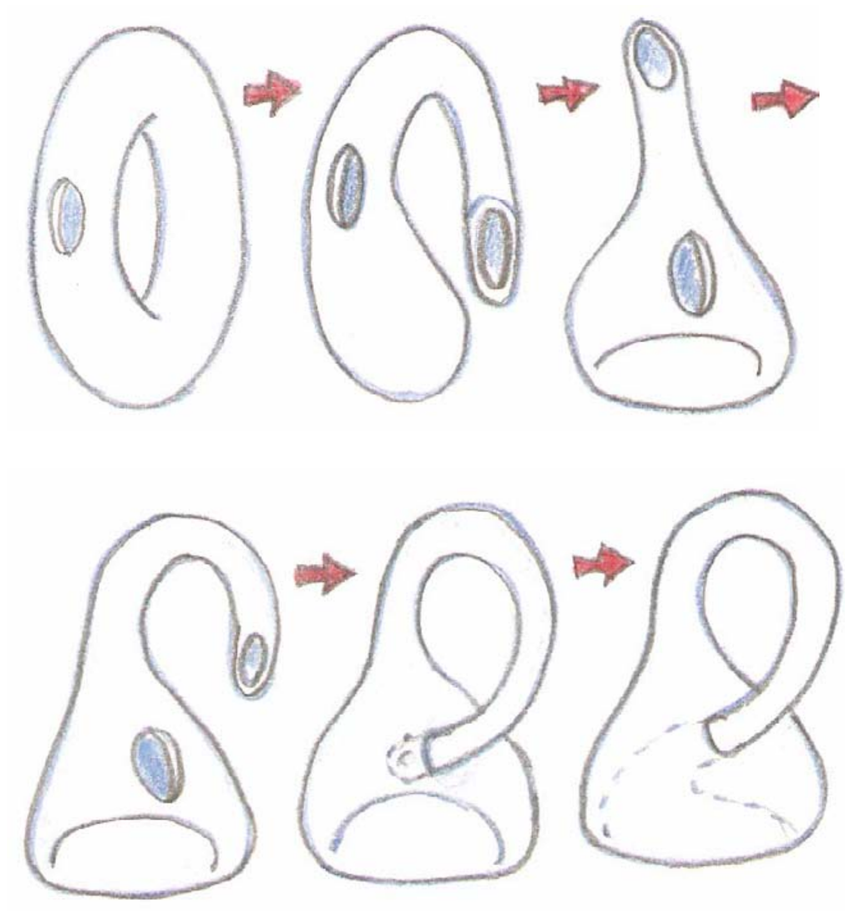
La botella de Klein que también recibe el nombre de "superficie de Klein", "toro de Klein" y "toro no orientable" es otro ejemplo de superficie no orientable que estudió, en 1882, el matemático alemán Felix Klein (1849-1925).

El nombre de "botella" procede de un juego de palabras, ya que, en alemán, kleinsche Fläche, se traduce como "superficie de Klein" kleinsche Flasche, por "botella de Klein".

Sus aplicaciones fuera del ámbito matemático son fundamentalmente las referidas al arte: escultura, pintura, decoración, etc.

REVISTA DIGITAL INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 19 JUNIO 2009



Así se construye una botella de Klein o “toro de una sola cara”.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 19 JUNIO 2009

Esta superficie tiene interesantes propiedades topológicas y una curiosidad no se puede llenar nunca pues se va vaciando a medida que se procede a llenarla.

7. BIBLIOGRAFÍA

- ROMERO SARABIA, ALFONSO (1986): *Álgebra lineal y Geometría* I. Editorial La Madraza.
- DE BURGOS, J. (1977): *Curso de Álgebra y Geometría.* Editorial Alhambra.
- QUEYSANNE, M. (1971): *Álgebra básica.* Editorial Vivens-Vives.
- DO CARMO, MANFREDO P. (1990): *Geometría diferencial de curvas y superficies.* Editorial Alianza Universidad Textos.
- GAVIRA, J. y REVENGA, A.: *Manual de Cartografía. Editorial Escelucer.*
- RAISZ, E.: *Cartografía General.* Editorial Omega.
- *http://es.wikipedia.org.*

Autoría

· María José Alfonso García
· I.E.S. "Los Ángeles", Almería
· E-MAIL: mjmatematicas@hotmail.com.