REVISTA DIGITAL INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 19 – JUNIO DE 2009

"APLICABILIDAD DE LA TRIGONOMETRÍA: MIDIENDO ALTURAS"

AUTORIA **NOEMI MÍNGUEZ LOPERA**
TEMÁTICA **TRIGONOMETRÍA**
ETAPA **3º Y 4º DE ESO**

Resumen

En este artículo vemos una de las aplicaciones de la tosca geometría a través de las mediciones indirectas para el cálculo de alturas inaccesibles. Se presenta aquí una experiencia de clase, en la que los alumnos ven la aplicabilidad directa de lo aprendido, para ellos, nuestros alumnos calcularán alturas de edificios significativos de la ciudad (el ayuntamiento, iglesias, teatro, hoteles, etc) hasta llegar a pintar un plano de la fachada a escala real.

Palabras clave

Trigonometría, alturas, geometría.

REVISTA DIGITAL INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 19 – JUNIO DE 2009

1. DEFINICIONES BÁSICAS

La trigonometría es la rama de la geometría que se utiliza para medir trigángulos relacionando sus ángulos y lados. Para todo ello se vale de las denominadas razones trigonométricas y de las relaciones entre ellas.

1.1. Razones trigonométricas de un ángulo agudo

Sobre un ángulo agudo α construimos un triángulo rectángulo ABC.

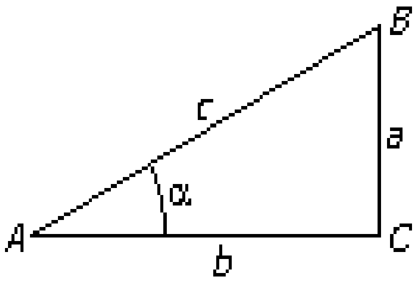

Figura1: Ángulo agudo

En base a éste se definen las razones seno, coseno y tangente, según:

$$sen(\alpha)=\frac{a}{c},\quad \cos(\alpha)=\frac{b}{c},\quad tg(\alpha)=\frac{b}{a}$$

Aunque estas son las tres razones fundamentales, se definen en base a éstas otras tres denominadas cosecante, secante y cotangente:

$$\cos ec(\alpha)=\frac{1}{sen(\alpha)},\quad \sec(\alpha)=\frac{1}{\cos(\alpha)},\quad cotg(\alpha)=\frac{1}{tg(\alpha)}$$

REVISTA DIGITAL INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 19 – JUNIO DE 2009

1.2. Características fundamentales de las funciones trigonométricas

Desde la perspectiva del análisis matemático, las razones trigonométricas son también funciones. En este epígrafe damos las características más importantes de estas funciones.

En cuanto al dominio las funciones seno y coseno pueden tomar cualquier ángulo, sin embargo la función tangente no está definida cuando el coseno resulta cero, ocurriendo esto en los ángulos de la forma 90º+k180º (también $\frac{\pi}{2}+k\pi$).

Por otro lado el dominio de estas funciones es: $sen(\alpha)\in[-1,1]$, $\cos(\alpha)\in[-1,1]$, $tg(\alpha)\in\Re$

Las tres funciones periódicas, las funciones seno y coseno de periodo 360º (2π radianes) y la función tangente también periódica pero en este caso de periodo es 180º (π radianes)

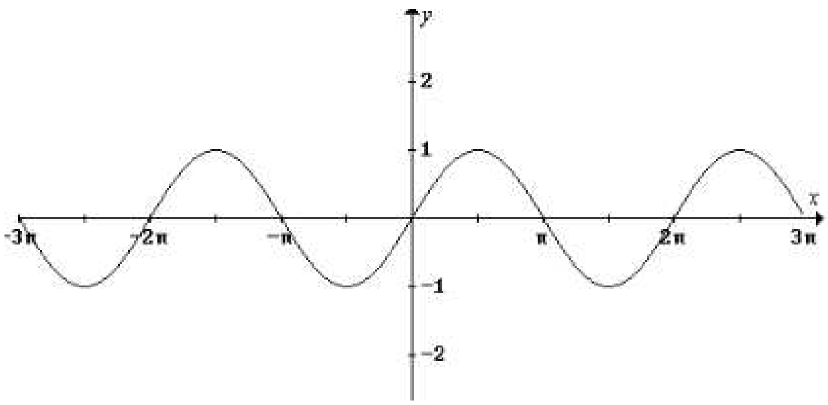

Figura2: Función seno ($y=sen(x)$)

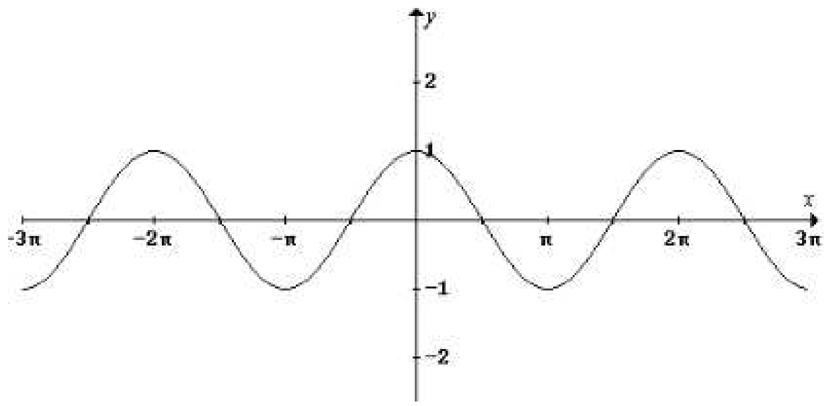

Figura3: Función coseno ($y=cos(x)$)

C/ Recogidas Nº 45 - 6º-A Granada 18005 csifrevistad@gmail.com

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 19 – JUNIO DE 2009

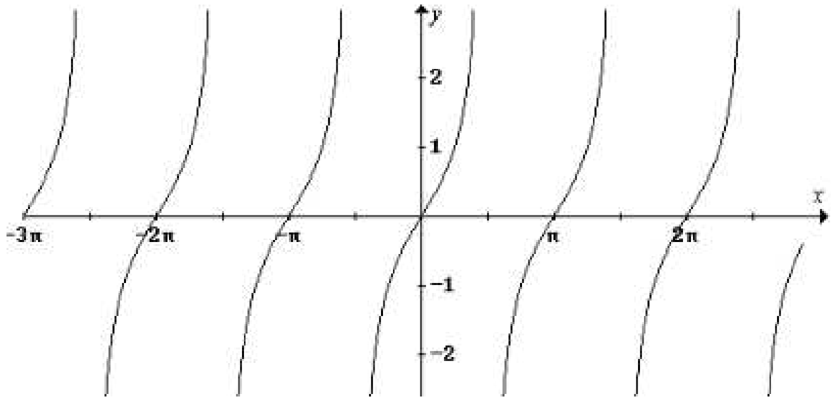

Figura4: Función tangente ($y = tg(x)$)

1.3. Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera

Para definir las razones trigonométricas de ángulos cualesquiera (de 0º a 360º) se empieza situando el ángulo en la llamada circunferencia goniométrica, una circunferencia de radio 1 con su centro, *O*, situado sobre unos ejes coordenados:

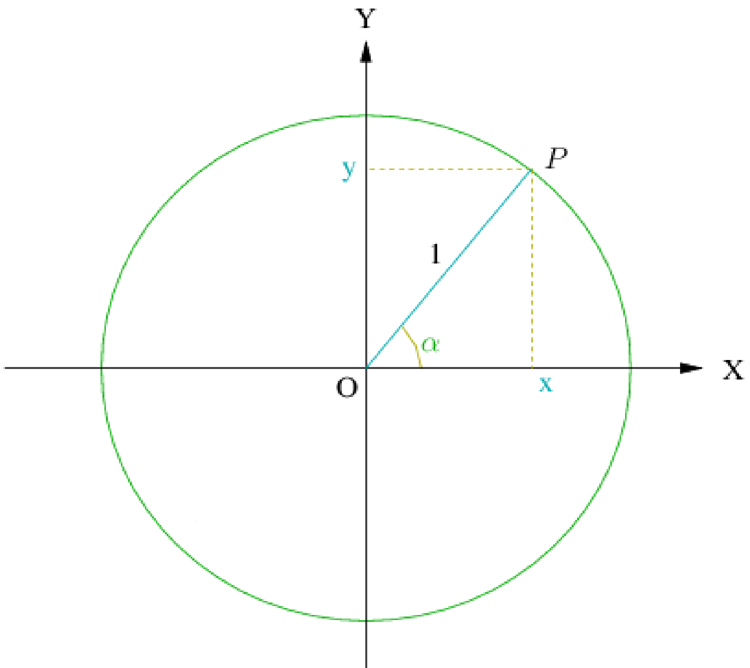

Figura5: Circunferencia goniométrica

C/ Recogidas Nº 45 - 6º-A Granada 18005 csifrevistad@gmail.com

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 19 – JUNIO DE 2009

A la vista de la Figura1, dado que el radio es igual a 1, luego la longitud de la hipotenusa es la unidad tenemos que las coordenadas del punto $P(x, y)$ nos facilitan los valores del $sen(\alpha)$ y $\cos(\alpha)$. A saber:

$$sen(\alpha) = x \qquad \cos(\alpha) = y$$

Apuntar, que así mismo, para cualquier ángulo podemos calcular sus razones trigonométricas correspondientes con la ayuda de la calculadora, para lo cual debemos activar el modo DEG. Así calcularemos el seno, coseno y tangente del ángulo con las teclas *sin, cos* y *tan*, respectivamente.

1.4. Relaciones fundamentales entre las razones trigonométricas.

Los valores de seno, coseno y tangente de un mismo ángulo no son independientes, sino que están relacionadas. Con la ayuda de las siguientes relaciones fundamentales, llamadas generalmente *relaciones fundamentales*, seremos capaces de conocida tan solo una de ellas calcular el resto de razones desconocidas.

1. La primera de las razones es obvia a la vista de la propia definición de la tangente de un ángulo:

$$tg(\alpha) = \frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

2. Conocido el seno de un ángulo podemos calcular el coseno, y viceversa con la ayuda de la siguiente igualdad:

$$sen^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

1.5. Razones trigonométricas recíprocas

Las funciones seno, coseno y tangente no son biyectivas y no por tanto no tienen función inversa, sin embargo, realizando cierta restricción sobre sus dominio se vuelven inyectivas y sobreyectivas, por lo que sí tendrán funciones inversas. Las funciones inversas de las funciones seno, coseno y tangente son el arcoseno, arcocoseno y arcotangente, respectivamente.

Así en este nuevo tipo de razones trigonométricas, dado un número real devuelve el ángulo para el cual la razón recíproca de dicho ángulo es precisamente dicho número real. Esto es:

$$ar\cos en(x)=\alpha \quad si \quad sen(\alpha)=x$$
$$ar\,co\,cos(x)=\alpha \quad si \quad \cos(\alpha)=x$$
$$ar\cot g(x)=\alpha \quad si \quad tg(\alpha)=x$$

Con la calculadora, encima de los botones de cálculo de seno, coseno y tangente aparecen las funciones $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ y $\tan^{-1}$, que corresponden respectivamente a las funciones de arcoseno, arcocoseno y arcotangente.

2. MIDIENDO ALTURAS

En el proyecto descartes podemos encontrar la siguiente “leyenda”:

“Cuentan que Tales, cuando estaba en Egipto, provocó admiración al calcular la altura de una pirámide, por sombras. Sin embargo hay dos versiones de cómo lo hizo.

La primera cita, es de Hieronymus, alumno de Aristóteles. Aquel nos cuenta que Tales determinó la altura de la pirámide midiendo la sombra de la pirámide en el momento en que la sombra de un hombre era igual a su altura.

La segunda versión se debe a Plutarco. Según este autor, Tales clavó en tierra una barra, observó las sombras y, utilizando las propiedades de los triángulos semejantes, determino la altura de una pirámide.

Ninguna de las dos versiones mencionan la dificultad, en cada uno de los casos, para obtener la longitud de la sombra de la Pirámide, es decir, la distancia desde el vértice de la sombra al centro de la base de la pirámide.”

¿Cuál es entonces cómo calculó Tales la altura de aquella pirámide?

Cerca de la pirámide clavó una estaca verticalmente en la arena. Luego inclinó la estaca en la dirección de su sombra, hasta colocarla sobre la arena, dejando así sobre la arena, la huella de la estaca. Luego volvió a clavar la estaca verticalmente en el mismo lugar.

Transcurrió algún tiempo, hasta que la sombra de la estaca llegó a coincidir exactamente con la huella que estaba sobre la arena. (Era de tarde, y las sombras crecen a medida que el sol se inclina).

REVISTA DIGITAL INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 19 – JUNIO DE 2009

En este momento, Thales dijo a los egipcios: "vayan de prisa y midan la sombra de la pirámide. A esa medida, sumen la mitad de lo que mide la base. Esa suma es la altura exacta de la pirámide".

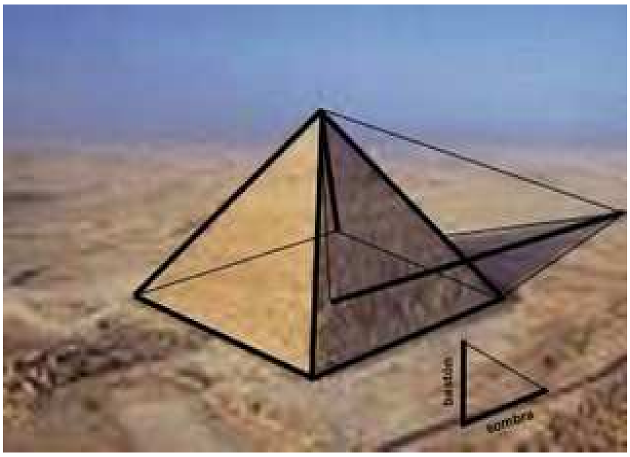

Figura6: Medición altura de la pirámide

Thales fue el primero en cimentar las bases del cálculo de alturas mediante las distintas razones trigonométricas. Explicamos el caso general: ¿qué debemos hacer cuando queremos calcular una altura inaccesible?

2.1. Resolución de triángulos rectángulos

Resolver un triángulo es hallar todos los elementos desconocidos del mismo (lados o ángulo) conocido alguno de ellos. Para resolución de estos triángulos nos serviremos de las razones trigonométricas y las relaciones fundamentales entre ellas.

Principalmente nos podremos encontrar dos casos distintos:

1. <u>*Conocemos dos de los lados*</u>*.* El otro lado lo calculamos mediante el teorema de Pitágoras, mientras que la suma de los otros dos ángulos (el tercero es el rectángulo igual a 90º) debe ser 90º y lo hallamos a partir de la razón trigonométrica (arcoseno, arcocoseno y/o arcotangente) que lo relacionada con los dos lados conocidos.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 19 – JUNIO DE 2009

2. <u>*Conocemos un lado y un ángulo*</u>. El otro lado se halla mediante la razón trigonométrica que lo relaciona con el lado y el ángulo conocidos, mientras que el otro ángulo se calcula restándole el ángulo conocido a 90º, esto es, es el complementario al ángulo conocido.

Como ejemplo vamos a resolver el siguiente triángulo:

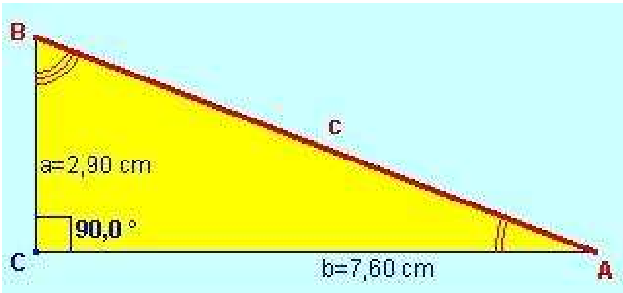

Figura7: Resolución de triángulos rectángulos

Conocido los lados a y b, nos queda por conocer el tercer lado c a partir del teorema de Pitágoras:

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$2.9^2 + 7.6^2 = c^2$$
$$c = 8.13$$

Para calcular el ángulo A utilizamos los lados a y b:

$$tg(A) = \frac{2.9}{7.6} = 0.38$$
$$A = ar\cot g(0.38) = 20.89^{\circ}$$

El último ángulo B es fácil de calcular: $B = 90^{\circ} - 20.89^{\circ} = 69.11^{\circ}$

C/ Recogidas Nº 45 - 6º-A Granada 18005 csifrevistad@gmail.com

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 19 – JUNIO DE 2009

3.- PROYECTO A DESARROLLAR

Con la realización de este proyecto conseguimos que nuestros alumnos y alumnas conozcan una aplicación práctica de la geometría y la trigonometría de tal manera que se perciba la utilidad de la matemática en general. En resumen, por grupos de 3 o 4 alumnos o alumnas deben entregar un plano a escala de la fachada de algún edificio característico de la ciudad: el ayuntamiento, el teatro, un hotel, iglesia u alguna casa antigua característica del municipio.

La ejecución completa del proyecto requiere de las siguientes etapas:

1. En la primera etapa, desarrollamos en clase los contenidos teóricos necesarias para realizar el proyecto. Dichos contenidos han sido expuestos en los epígrafes anteriores.

2. En el taller de tecnología se elabora un hipsómetro.

Foto1: Hipsómetro casero.

3. Entrenamiento dentro del propio centro escolar midiendo determinadas alturas. Pero, ¿cómo medimos las alturas?

   Seleccionamos un punto fijo de medida. A ojo, con la ayuda del hipsómetro seleccionamos el ángulo de visión (desde nuestros ojos a la altura máxima del edificio), luego ya conocemos un ángulo, además del ángulo recto que forma el edificio con el suelo. También disponemos de la distancia entre nuestros pies y el edificio, con lo que ya tenemos un lado, a partir de aquí aplicamos las técnicas de resolución de triángulos rectángulos expuestos en el epígrafe 2.1.

4. Trabajo de campo, realizando las mediciones oportunas sobre el edificio seleccionado a fin de confeccionar el plano de su fachada.

5. CONCLUSIÓN

Nuestros alumnos suelen estudiar uno o dos días antes de los exámenes, estudian una teoría casi sin entenderla y muchos sin saber para qué y por qué la estudian. Esto hace que los conocimientos no tengan ningún tipo de fundamentación y se olviden enseguida.

El aprendizaje es un proceso de construcción del conocimiento. Defienden las teorías constructivistas, que el ambiente de aprendizaje más idóneo es aquel en el que alumnado, profesorado y entorno interactúan. Este aprendizaje implica el desarrollo de la persona, esto es, la construcción del conocimiento es un proceso activo que realiza el alumno/a.

En una forma de aplicar estas teorías a nuestra vida cotidiana docente, intentado llevar a cabo en nuestra aula un aprendizaje significativo, creemos que es de vital importancia que nuestros alumnos vean la aplicabilidad de lo aprendido en su entorno o contexto personal, e incluso se vean implicados en la construcción de estos conocimientos a través del desarrollo de diferentes proyectos en los que ellos mismos sean los implicados en definitiva de encontrar las definiciones necesarias para llevarlo a cabo.

En particular en este artículo, nuestros alumnos aplican la teoría trigonométrica a entender las proporciones que le rodea, en los propios edificios de su localidad. En el proyecto expuesto, utilizando los conocimientos vistos en clase nuestros alumnos deben ser capaces de elaborar un plano de la fachada de algún edificio característico de la ciudad, viendo de este modo la aplicación directa de estos conocimientos aprendidos.

6. BIBLIOGRAFÍA

6.1. Monografías.

- Puig Adam, P. (1986). *"Curso de Geometría Métrica I"*. Madrid: Euler.
- Fernando, J. (2008). *"Algebra lineal y geometría".* Madrid: Sanz y Torres, D.L.
- Long, L. (2006). *"La geometría: actividades y pasatiempos para aprender jugando"*. México: Limusa Wiley.

6.2. Webs

- http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/elreto/elretodos.html

Autoría

· Nombre y Apellidos: Noemi Mínguez Lopera
· Centro, localidad, provincia: IES "Antonio Gala". Palma del Río (Córdoba)
· E-MAIL: estamomy@hotmail.com