



ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 19 – JUNIO DE 2009

“INTRODUCCION A LAS FUNCIONES UTILIZANDO PROGRAMAS DE GEOMETRÍA INTERACTIVA”

AUTORÍA PATRICIA PÉREZ ORTIZ
TEMÁTICA ANÁLISIS. FUNCIONES
ETAPA ESO

Resumen

Mediante algunos ejemplos se analiza cómo los programas de Geometría Interactiva pueden desempeñar un importante papel pedagógico de cara a introducir la funciones desde un punto de vista no algebraico.

Palabras clave

Variables, dependencia funcional.

1. INTRODUCCIÓN

En la LOE la enseñanza de la matemática en la ESO se ha estructurado en cinco grandes bloques: números, álgebra, funciones, geometría y probabilidad. De entre todos ellos es posible que el de funciones se sitúe en un nivel superior, más abstracto. La aritmética, los números y sus operaciones, las medidas y fórmulas de la geometría, las variables aleatorias, tablas de probabilidad, y el lenguaje algebraico aportan nutrientes al organismo de las funciones.

Los números y las funciones desempeñan en la matemática papeles análogos a los que existen en biología entre los árboles tomados individualmente y los bosques. En éstos lo importante son las interrelaciones que se establecen entre los elementos que lo componen, el ecosistema. Igual ocurre en matemáticas con las funciones, lo más importante no son los valores particulares que se obtienen al introducir otros, sino nuevos conceptos como variables, independiente y dependiente, dependencia funcional, crecimiento, decrecimiento, gráficas....

Existen muchas formas de dar una función: verbal, a partir de tablas, de gráficos, mediante algoritmos y la más frecuente en las clases de matemáticas mediante una fórmula algebraica. Es posible que el predominio de ésta última sesgue de alguna manera la idea original de función y obvie el un proceso de delimitación de las variables, cuál se considera como independiente, cuál como dependiente, si existe entre ambas una relación funcional, si las variables son o no proporcionales, si existe entre las mismas



ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 19 – JUNIO DE 2009

una dependencia lineal... En suma se sacrifica en parte la experimentación y la construcción en aras del producto ya elaborado, del cálculo numérico, del álgebra.

Krutetskii (1976) y otros investigadores clasificaron en relación con la enseñanza de las matemáticas a los alumnos en tres grupos:

- El “visual o geométrico” que incluiría a los alumnos con predominio hacia los aspectos visuales de las matemáticas, razonamientos gráficos.
- El “no visual o analítico” formado por los alumnos que hacen un uso intensivo de los aspectos formales y abstractos.
- El “intermedio o armónico” formado por aquellos alumnos que conjugan equilibradamente los razonamientos y esquemas visuales con los abstractos.

Es claro que el predominio de los aspectos abstractos y algebraicos expulsa del sistema educativo a muchos alumnos y propicia el abandono y absentismo escolar. El uso de programas de Geometría Interactiva, como Geogebra, puede evitar algunos de estos excesos, al permitir el manejo de funciones de tipo geométrico sin el recurso a las fórmulas y al lenguaje algebraico. Evidentemente los algoritmos que definen las funciones residen internamente en los programas, pero permanecen ocultos y no se es consciente de los mismos. La posibilidad de desplazar los objetos libres interactivamente, arrastrándolos con el ratón, les otorga categoría casi de variables, y permite observar los cambios de forma rápida, y sin cálculos previos. Hablando con propiedad los programas de geometría interactiva no manejan variables abstractas, sino instancias concretas de las mismas, pero la posibilidad de modificación interactiva, las convierte en un paso intermedio antes de la formalización.

Sin los programas de geometría interactiva semejante trabajo experimental sería prácticamente imposible, pues exigiría constantemente rehacer el proceso, nuevos dibujos y nuevos cálculos. Sería como una vuelta a los tiempos en que la construcción de las gráficas exigía rellenar previamente una tabla con un número suficiente de valores que debían calcularse manualmente, trasladar los puntos a un papel cuadrulado, y rellenar con trazos los huecos.

2. ALGUNAS CONSIDERACIONES METODOLÓGICAS

Los programas de Geometría Interactiva pueden hacer de antesala al estudio más detallado y pormenorizado de las funciones, ya sean éstas lineales, cuadráticas etc. En las actividades que a continuación se proponen se hace uso del programa de Geometría Interactiva llamado Geogebra por al menos dos razones. En primer lugar por tratarse de un programa gratuito y en segundo por ser un programa con múltiples usos. Puede considerárselo como un programa de Geometría Interactiva pero también lo es de análisis funcional, representa funciones, resuelve sistemas de ecuaciones, calcula derivadas etc.

Desde este punto de vista puede ser recomendable trabajar el bloque de Geometría antes del de Funciones. Los cálculos de longitudes, de áreas, de ángulos de objetos geométricos relacionados con

los polígonos y circunferencias, aun siéndolo de objetos concretos, se entenderían como realizaciones de objetos más abstractos.

Antes de analizar e investigar, por ejemplo, la estructura de las funciones lineales el alumno deberá haberse encontrado con situaciones concretas en las que naturalmente surjan aquéllas para desde la experiencia concreta proceder a su generalización.

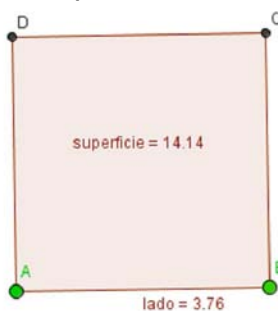
En geometría muchas veces la pregunta de si existe una relación funcional entre dos variables ligadas a un objeto geométrico admite una interpretación más manejable: ¿es posible construir el objeto geométrico con únicamente el dato considerado como primario? Lo que conduce al problema más práctico de diseño de modelos geométricos.

En las actividades que siguen se concede importancia a aspectos que a primera vista podrían parecer banales como que los nombres que se utilicen sean sugerentes y aludan a la situación a considerar. Antes de generalizar el uso de variables comodines, como 'x' o 'y', es oportuno utilizar nombres en contexto, como área, longitud, arco, ángulo...

3. ACTIVIDAD 1

Formulación inicial: *Construye un modelo geométrico que visualice las medidas del lado y de la superficie de un cuadrado.*

1. En una primera fase se deberá responder a las preguntas:
 - a. ¿Sobre qué figura geométrica trata la actividad?
Respuesta: cuadrado. Se puede pedir que se enuncie una definición operativa del mismo.
 - b. ¿Qué aspectos del cuadrado se consideran?
Respuesta: las medidas del lado y de la superficie del cuadrado.
2. En una segunda fase se construirá el modelo geométrico pedido. Al disponer Geogebra de una herramienta para construir polígonos regulares la construcción no reviste especial dificultad y no será necesario dedicar mucho tiempo a la parte informática.



Se han ocultado los nombres de los lados del cuadrado que Geogebra asigna por defecto y se han renombrado uno de ellos con el nombre 'lado' y el cuadrado con el nombre superficie. Para Geogebra los nombres de los segmentos y de los polígonos son etiquetas que designan su longitud



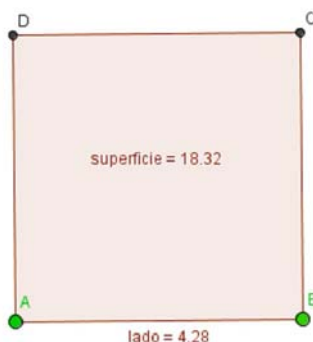
INNOVACIÓN
Y
EXPERIENCIAS
EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 19 – JUNIO DE 2009

y superficie respectivamente. Por ello, pulsando con el botón derecho del ratón sobre el objeto cuyas propiedades se desea cambiar, se ha hecho que se muestren tanto la etiqueta como el valor. Es conveniente que el alumno domine esta técnica de ocultar, mostrar etiquetas, con o sin valor. Si se desea pueden ocultarse los nombres de los vértices del cuadrado.

Aquellos vértices considerados como libres y que por ello pueden arrastrarse con el ratón se han coloreado de verde.

Obviando los aspectos cosméticos de la construcción lo esencial de la misma estriba en que al arrastrar con el ratón cualquiera de los puntos A o B cambian a la par la medida del lado del cuadrado y su superficie, como puede observarse en la siguiente variación de la misma construcción:



3. En una tercera fase, una vez realizado y comprobado el funcionamiento del modelo, el alumno debería responder individual o colectivamente a un guión con preguntas del siguiente tenor:
 - a) ¿Cuál es la superficie de un cuadrado cuyo lado mide, por ejemplo, 3,12 cm?
 - b) ¿Cuál es la medida del lado del cuadrado cuya superficie es, por ejemplo, 4,32 cm²?
 - c) ¿En los cuadrados existe una dependencia funcional entre la medida del lado y la de la superficie o, dicho de otra forma, la primera determina sin equívoco la segunda? A su vez ¿en los cuadrados la superficie determina recíprocamente la medida del lado?
 - d) Tomando como primer dato la medida del lado del cuadrado y considerando la superficie como dependiente de aquél,
 - i) ¿Dirías que aumenta la superficie al aumentar el lado?
 - ii) ¿Dirías que disminuye la superficie al disminuir el lado?
 - iii) ¿Hay algún cuadrado cuya superficie sea máxima?
 - iv) ¿Hay algún cuadrado cuya superficie sea mínima?
 - v) En los cuadrados ¿la medida del lado y de su superficie son magnitudes directa o inversamente proporcionales? En caso afirmativo ¿cuál es la constante de proporcionalidad?

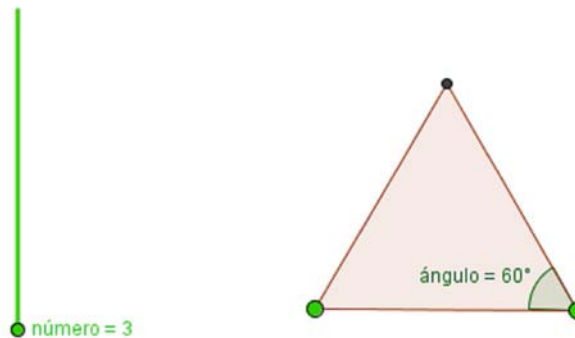
4. ACTIVIDAD 2

Formulación inicial: *Construye un modelo geométrico que visualice el número de lados de un polígono regular y la medida de cualquiera de sus ángulos.*

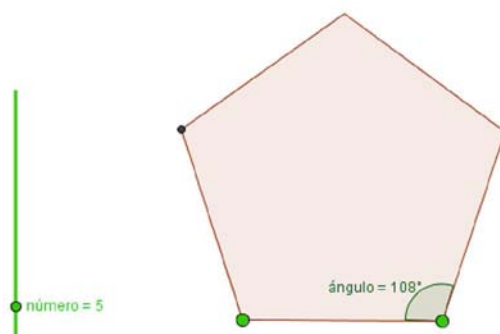
**INNOVACIÓN
Y
EXPERIENCIAS
EDUCATIVAS**

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 19 – JUNIO DE 2009

1. En una primera fase se deberá responder a las preguntas:
 - a. ¿Sobre qué figuras geométricas trata la actividad?
Respuesta: polígonos regulares. Se puede pedir que se enuncie una definición de estos polígonos.
 - b. ¿Qué aspectos del polígono regular se consideran?
Respuesta: el número de lados y la medida de sus ángulos interiores.
2. En una segunda fase se construirá el modelo geométrico pedido. Geogebra, al igual que ocurría en la actividad anterior con la medida de los lados de un polígono, dispone de una herramienta que permite visualizar la medida de sus ángulos.



En la construcción se ha usado un deslizador vertical para representar el número de lados del polígono y poder manejarlo interactivamente. La etiqueta 'número' asociada al deslizador sólo toma valores enteros. Se han ocultado los nombres de los objetos superfluos. Al arrastrar el punto que aparece en el deslizador cambia el número de lados del polígono regular y en consecuencia la medida del ángulo interior.



3. En una tercera fase el alumno debería responder individual o colectivamente a un guión con preguntas del siguiente tenor:
 - a. ¿Cuál es la medida del ángulo interior de un polígono de 7 lados?
 - b. ¿Cuál es el número de lados de un polígono regular cuyos ángulos interiores miden 120° ?
 - c. ¿Cuál es el número de lados de un polígono regular cuyos ángulos interiores miden 80° ?
 - d. ¿En los polígonos regulares existe una dependencia funcional entre el número de lados y la medida de sus ángulos interiores o, dicho de otra forma, el primero determina sin

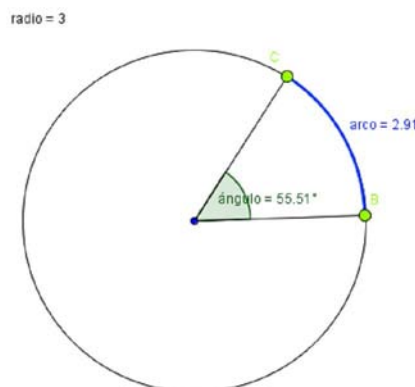
equivoco la segunda? A su vez ¿en los polígonos regulares la medida de sus ángulos interiores determina recíprocamente el número de lados?

- e. Tomando como primer dato el número de lados del polígono regular y considerando la medida de sus ángulos interiores como dependiente de aquél,
- i. ¿El número de lados del polígono regular puede ser 2? ¿Y 5'12? ¿Qué valores puede tomar el número de lados del polígono regular?
 - ii. ¿El ángulo interior de un polígono regular puede medir 145° ? ¿Y 32° ? ¿y 126° ? ¿Qué valores pueden tomar los ángulos interiores de un polígono regular?
 - iii. ¿Dirías que aumenta el ángulo al aumentar el número de lados? ¿Dirías que disminuye el ángulo al disminuir el número de lados?
 - iv. ¿Hay algún polígono regular de ángulo interior máximo?
 - v. ¿Hay algún polígono regular de ángulo interior mínimo?
 - vi. ¿Son proporcionales, directa o inversamente, el número de lados de un polígono regular y la medida de sus ángulos interiores? En caso afirmativo ¿cuál es la constante de proporcionalidad?

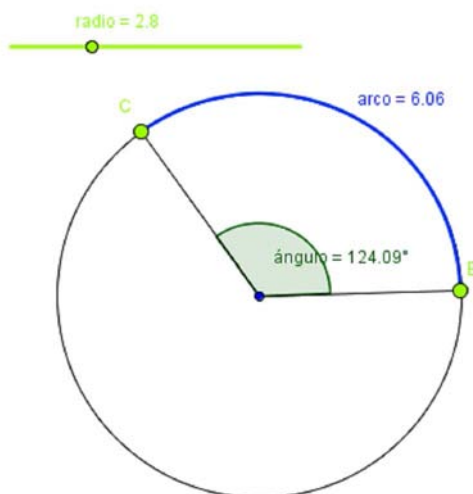
5. ACTIVIDAD 3

Formulación inicial: *Construye un modelo geométrico que en una circunferencia de radio fijo visualice la medida de un arco y del ángulo correspondiente.*

1. En una primera fase se deberá responder a las preguntas:
 - a. ¿Sobre qué figuras geométricas trata la actividad?
Respuesta: Circunferencia de radio determinado. Se puede pedir que se enuncie una definición de circunferencia.
 - b. ¿Qué aspectos de la circunferencia se consideran?
Respuesta: la medida del arco y el ángulo central.
2. En una segunda fase se construirá el modelo geométrico pedido. Geogebra dispone de una herramienta que permite construir circunferencias con un radio prefijado.



3. En una tercera fase el alumno debería responder individual o colectivamente a un gui3n con preguntas del siguiente tenor:
- a. ¿Cu3l es la medida del arco para un 3ngulo de $186^{\circ}32'$?
 - b. ¿Cu3l es la medida del 3ngulo correspondiente a un arco de 2,14 cm?
 - c. ¿Cu3l es la medida del 3ngulo correspondiente a un arco de 20 cm, en la circunferencia de radio 3 cm?
 - d. ¿En una circunferencia de radio prefijado existe una dependencia funcional entre el 3ngulo central y la medida del arco correspondiente o, dicho de otra forma, el primero determina sin equívoco la segunda? A su vez ¿la medida del arco determina recíprocamente el 3ngulo central?
 - e. Tomando como primer dato la medida del 3ngulo central y considerando la medida del arco como dependiente de aqu3l,
 - i. ¿Qu3 valores puede tomar el 3ngulo central?
 - ii. ¿El arco puede medir 3cm? ¿Y 10? ¿y 40? ¿Qu3 valores puede tomar la medida del arco?
 - iii. ¿Dirías que aumenta el arco al aumentar el 3ngulo central? ¿Dirías que disminuye el arco al disminuir el 3ngulo central?
 - iv. ¿La medida del arco alcanza un valor m3ximo?
 - v. ¿La medida del arco alcanza un valor m3nimo?
 - vi. ¿Son proporcionales, directa o inversamente, el 3ngulo central y el arco correspondiente? En caso afirmativo ¿cu3l es la constante de proporcionalidad?
4. En esta actividad se podr3a introducir una nueva pregunta: ¿Qu3 sucede si se hace variar el radio? Tal pregunta conducir3a con seguridad al dise3o de un nuevo modelo en el que se permitiera la variaci3n del radio. Los deslizadores ya utilizados en la actividad 2 podr3an ser 3tiles en el nuevo dise3o.





ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 19 – JUNIO DE 2009

6. NUEVAS ACTIVIDADES

Muchas otras actividades podrían haber sido propuestas desde el mismo enfoque experimental que las anteriormente consideradas. Sirvan de muestra:

1. Conversión de los ángulos expresados en el sistema sexagesimal a radianes, y viceversa.
2. Dependencia entre el número de lados y la medida del lado de los polígonos regulares inscritos en una circunferencia fija.
3. Dependencia entre el ángulo central y el área del sector circular correspondiente en una circunferencia de radio determinado.
4. Dependencia entre el ángulo central y la longitud de la cuerda correspondiente en una circunferencia de radio determinado.
5. A partir de la circunferencia goniométrica, de radio 1, definir y analizar las funciones seno y coseno.

7. BIBLIOGRAFÍA

- Funciones y gráficas. Autor: C. Azcárate y J. Deulufeu. Edit: Síntesis
- El lenguaje de las funciones y gráficas. Publicado por el MEC
- Para páginas de Internet en que se haga uso de Geogebra para la enseñanza de las funciones ver <http://recursos.pnte.cfnavarra.es/~msadaall/geogebra/index.htm>.

Autoría

- Nombre y Apellidos: Patricia Pérez Ortiz
- Centro, localidad, provincia: IES Torreblanca, Sevilla, Sevilla
- E-mail: patruki957@yahoo.es