ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 19 – JUNIO DE 2009

“TRABAJAR CON SUCESIONES EN EL AULA”

AUTORÍA **PATRICIA PÉREZ ORTIZ**
TEMÁTICA **MATEMÁTICAS. ÁLGEBRA.**
ETAPA **ESO**

Resumen

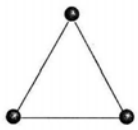
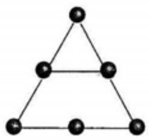
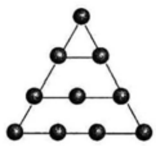
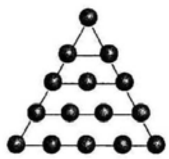
Los niños en nuestra cultura aprenden a contar a través de la secuencia o sucesión de los números naturales: 1, 2, 3… que es la primera y fundamental sucesión. Contar consiste en poner en relación los objetos de un conjunto con una parte de la secuencia de los números naturales. A partir de ésta nacen las secuencias de los días, de los meses, del número de diagonales de los polígonos regulares, de los sucesivos ingresos familiares o intereses de las cuentas bancarias… Las sucesiones surgen al poner en relación funcional el conjunto de los números naturales con los objetos de otro conjunto.

Palabras clave

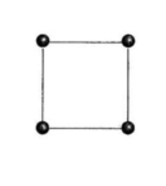
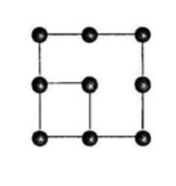
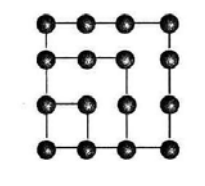
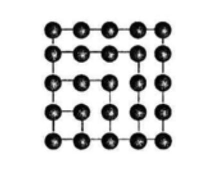
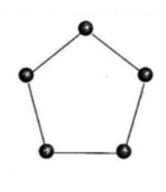
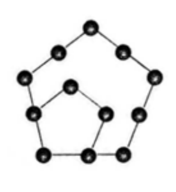
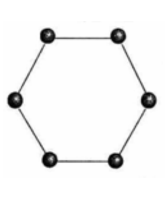
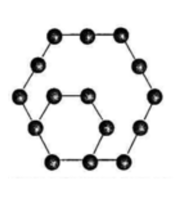
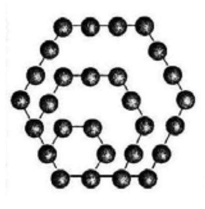
Sucesión. Secuencia.

1. INTRODUCCIÓN

Pitágoras y los Pitagóricos, para quienes todo lo cognoscible era número, descubrieron pautas numéricas en las disposiciones geométricas de los números, y atribuyeron a algunos de éstos nombres geométricos. Así hablaban de los números triangulares, cuadrados, pentagonales…

TIPO	**ORDEN**				
	1	2	3	4	5
TRIANGULARES					

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 19 – JUNIO DE 2009

	1	3	6	10	15
CUADRADOS					
	1	4	9	16	25
PENTAGONALES					
	1	5	12	22	35
HEXAGONALES					
	1	6	15	28	45

Es posible que estas disposiciones permitieran descubrir algunas relaciones numéricas generales que dieran origen a la **aritmética** o ciencia abstracta y deductiva de las propiedades y estructuras que atañen a los números. Y a través de la aritmética el poder de la razón y de la deducción se extendiera a las más diversas áreas del conocimiento.

Entre estas relaciones numéricas podrían citarse las siguientes:

la suma de dos números triangulares consecutivos, genera los números cuadrados: 1+3 = 4, 3+6 = 9, 6+10 = 16, ...

O el primer número hexagonal es el primer número triangular, el segundo número hexagonal es el tercer número triangular, y el tercer número hexagonal es el quinto triangular, y así sucesivamente.

O el primer número pentagonal es la suma del primer número triangular y del primer número cuadrado menos 1, el segundo número pentagonal es la suma de los segundos números triangular y cuadrado menos 2, ...

Por otra parte, Euclides en el libro XI de su obra los Elementos habla de magnitudes "sucesivamente proporcionales", y nos dice que dado un conjunto de números naturales *a, b, c, d*,… son sucesivamente proporcionales si:

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\cdots$$

De donde llamando $r=\frac{a}{b}$ e invirtiendo los cocientes se obtiene:

$$b = ar$$

$$c= br = a r^2$$

$$d= cr = a r^3$$

Y, en el libro XXXV llega a obtener una fórmula para hallar la suma de los términos de esta sucesión a, b, c, d,…

La aportación de Euclides a las progresiones geométricas consiste en una definición indirecta de ellas y la obtención de una expresión para hallar la suma de sus términos.

Pero quizás una de las sucesiones más conocidas haya sido la sucesión de Fibonacci, donde el primer elemento es el 0, el segundo es el 1 y los restantes se obtienen como la suma de los dos anteriores. Esta sucesión fue descrita en Europa por Leonardo de Pisa, matemático italiano del siglo XIII también conocido como Fibonacci. Antes de que Fibonacci escribiera su trabajo, la sucesión de los números de Fibonacci había sido descubierta por matemáticos hindúes tales como Gopala (antes de 1135) y Hemachandra.

Modernamente las sucesiones se estudian y tienen aplicaciones en campos tan diversos como por ejemplo la economía o la geometría fractal.

2. ¿CÓMO TRABAJAR LAS SUCESIONES EN EL AULA?

Lo bueno del trabajo con sucesiones, es que nos permite realizar muchas aplicaciones a la vida cotidiana de los alumnos, lo que nos beneficia para trabajar competencias como la de autonomía e iniciativa personal (descubrir regularidades y pautas), la social y ciudadana (aplicaciones económicas como interés simple y compuesto)…

Sin embargo, esto nos obliga a hacer una programación exhaustiva de lo que queremos que trabajen nuestros alumnos.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 19 – JUNIO DE 2009

TRABAJAR CON SUCESIONES

FASES	FASE I: INICIAL Y MOTIVACIÓN	FASE II: DESARROLLO	FASE III: CIERRE Y AMPLIACIÓN
METODOLOGÍA	Investigar de una forma “informal” regularidades y pautas, en conjuntos numéricos y composiciones geométricas	Ejercicios y problemas en contexto, donde se adquieran las destrezas necesarias para el trabajo con sucesiones expresadas de manera recurrente, con progresiones aritméticas y geométricas, e interés simple y compuesto.	Actividades de investigación, (algunas de ellas grupales) sobre la sucesión de Fibonacci. Aplicar a dicha sucesión los conocimientos adquiridos.
RECURSOS	Hojas de actividades, en distintos formatos electrónico y en papel.	Regla, escuadra y cartabón Calculadora Hoja de Cálculo	Internet Lecturas
TEMPORALIZACIÓN	3 SESIONES (APROX)	6 SESIONES (APROX)	3 SESIONES (APROX)

EVALUACIÓN

Para llevar a cabo dicha evaluación se tendrán en cuenta los siguientes referentes:
- Observación de intervenciones en el aula.
- Valoración de trabajos personales y colectivos.
- Control de actividades realizadas en el aula.
- Preguntas directas en clase.
- Pruebas escritas.
- Control de actividades mandadas para casa.

3. FASE I: MOTIVACIÓN

En esta fase se establecen los conocimientos previos que posee el alumno relacionados con las sucesiones, sus intereses en relación a ella, y se proponen actividades que motiven al alumno a adquirir los conocimientos que pretendemos que alcancen. Se puede trabajar con la definición de sucesión y con las distintas formas de dar una sucesión.

3.1. Definición, notación y vocabulario

Sucesión en A (o de elementos de A) es cualquier aplicación de N en A.

$$s : N \to A$$

Dependiendo del tipo de elementos de A, la sucesión se dice numérica, funcional, de figuras geométicas… Si se trata de una sucesión numérica, ésta podría ser de números naturales, enteros, racionales, reales, complejos.

Los elementos de s(N) se denominan términos de la sucesión, s(1), s(2), s(3)… se denotan más brevemente mediante notación de subíndices $s_1, s_2, s_3 \ldots$ Estos términos se denominan primero, segundo, tercero…En general el término s(n) se designa también s_n y se denomina término enésimo.

3.2. Formas de definir una sucesión

1. Método descriptivo

   Consiste en describir mediante alguna propiedad, o dando algunos elementos de la sucesión para deducir dicha propiedad (por ejemplo, la sucesión de los números pares)

2. Método analítico

   Al igual que ocurre con las funciones una sucesión puede en ocasiones venir expresada por una fórmula de tipo algebraico, como $s_n = 2n$. No siempre es posible calcular el término general de una sucesión como ocurre con los números primos.

3. Método recurrente

   En él a partir de un término los términos de la sucesión son definidos a partir del anterior o anteriores. Este tipo de sucesiones se llaman también recurrentes (por ejemplo, $\begin{array}{l} a_1 = 5, \\ a_n = n \cdot a_{n-1} \quad si\ n \geq 2 \end{array}$).

3.3. Actividad 1: Gauss

Proponer la siguiente situación:

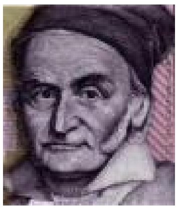
Carl Friedrich Gauss (1777-1855) fue matemático, físico y astrónomo, y desde muy temprana edad mostró una prodigiosa habilidad para los números. Se cuenta que a los 10 años de edad su maestro de

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 19 – JUNIO DE 2009

escuela ordenó, para mantener ocupados a los niños de su aula, que sumaran los números del 1 al 100. El pequeño Gauss obtuvo la respuesta casi de inmediato: 5.050 ¿cómo lo hizo? Dar un tiempo para que los alumnos y alumnas piensen sobre este ejercicio y den sus respuestas. Luego presentar la solución:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 50 + 51 + \cdots + 98 + 99 + 100$$

$$\begin{array}{c} 101 \\ 101 \\ 101 \\ \vdots \end{array}$$

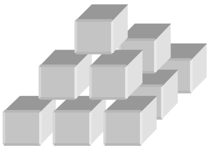


Los 100 números se agrupan en 50 pares cuya suma es 101. Luego: 101 x 50 = 5 050.

A continuación se le puede plantear una pequeña actividad de investigación, donde nos contesten una serie de preguntas referentes a Gauss.

3.4. Actividad 2: Cubos

Con un grupo de 250 cubos se quiere hacer una pirámide para exponer en la Plaza de las Tres Culturas, de modo que haya un solo cubo en el vértice superior (primera capa), cuatro cubos en la segunda capa, nueve en la tercera y así sucesivamente hasta la última capa. ¿Cuántas capas pueden hacerse y cuántos cubos sobran?



3.5. Actividad 3: Tiras numéricas

Observa como está construida la tira:

3	**4**	**7**	**11**	**18**

Describe la ley de construcción.

Siguiendo dicha ley completa la siguiente tira numérica:

		70		

4. FASE II: DESARROLLO

Donde se dedicará la mayor parte del tiempo a que el alumno adquiera las destrezas y protocolos necesarios para el trabajo en la unidad, relacionando estos con situaciones o contextos reales. Se puede profundizar en el trabajo con sucesiones aritméticas y geométricas.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 19 – JUNIO DE 2009

4.1. Definición de sucesión aritmética

Se llaman así a aquellas sucesiones en que los términos a partir del primero se obtienen sumando al anterior una cantidad fija, llamada diferencia.

$$s_n = s_{n-1} + d \quad \forall n \geq 2 .$$

Por d se simboliza la diferencia de la sucesión aritmética.

4.2. Definición de sucesión geométrica

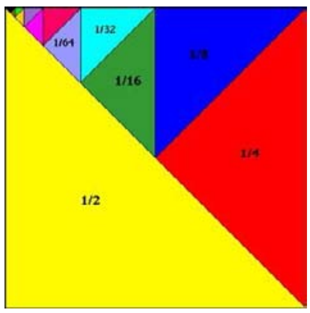
Se llaman así a aquellas sucesiones en que los términos a partir del primero se obtienen multiplicando el anterior por una cantidad fija, llamada razón

$$s_n = r s_{n-1} \quad \forall n \geq 2 .$$

Por r se simboliza la razón de la sucesión geométrica.

4.3. Actividad 4: Suma de una progresión geométrica

Observa la figura y contesta a las siguientes preguntas:



1. Coloca los números que aparecen en el dibujo en orden estrictamente decreciente.
2. ¿Qué tipo de sucesión se nos presenta?
3. ¿Puedes encontrar alguna ley de formación?
4. ¿Qué representa la figura?
5. ¿Cuál es el área del cuadrado? En consecuencia, ¿qué podrías decir de nuestra sucesión?

RECUERDA:

Sea s una sucesión geométrica. La suma de sus n primeros términos S_n puede obtenerse mediante $\begin{cases} S_n = \dfrac{s_1 - s_n \cdot r}{1-r} & si \quad r \neq 1 \\ S_n = n \cdot s_1 & si \ r = 1 \end{cases}$. Y si Sea s una sucesión geométrica de $|r| < 1$. La suma de todos sus términos S puede obtenerse mediante $\lim S_n = \dfrac{s_1}{1-r}$.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 19 – JUNIO DE 2009

4.4. Actividad 5: Un problema

Aurora quiere rellenar sus muñecas rusas de arena o de otra sustancia que les de consistencia para que así tengan más estabilidad, ya que por separado son muy frágiles y le gusta tenerlas alineadas.

Si el volumen de la muñeca más grande es $\sqrt{13}\ cm^3$, y el volumen del resto obedece la siguiente ley de recurrencia $a_n = \sqrt{a_{n-1}}$. ¿Qué cantidad de arena necesitará para llenar todas las muñecas? Ayúdate de una tabla y de la calculadora (utiliza la tecla ANS o la memoria para la recurrencia), y ¡no te olvides de las unidades!

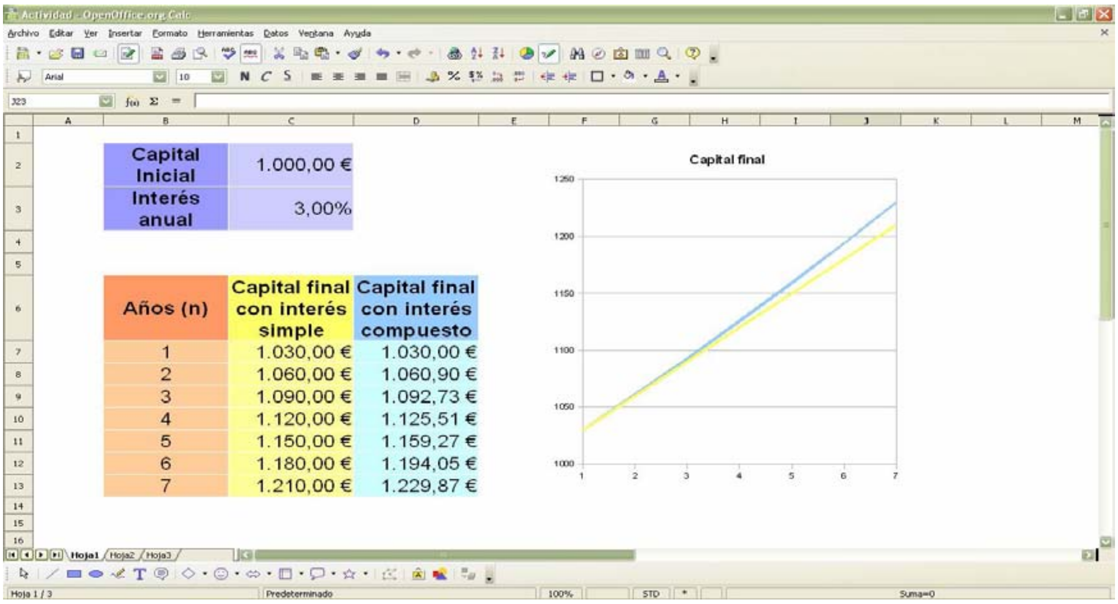
4.5. Actividad 6: Interés simple e interés compuesto

Investiga por Internet el interés que te ofrecen los distintos bancos y cajas al ingresar una determinada cantidad a plazo fijo durante una serie de años. A continuación, con los datos recogidos elabora una hoja de cálculo con el OpenOffice Calc, y aplica a dicho efectivo el interés anual correspondiente, utilizando el simple y el compuesto (puedes tomar como ejemplo la hoja de cálculo adjunta). ¿Por qué crees que interesa más un tipo de interés compuesto a uno simple? Elabora un gráfico para estudiar más fácilmente su evolución.

Podemos aprovechar para utilizar esta actividad para insertar el tema transversal de *Educación al Consumidor*, haciéndonos la siguiente pregunta:

¿Qué banco o caja nos ofrece mejores condiciones?

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 19 – JUNIO DE 2009



5. FASE FINAL: CIERRE

Esta última fase se puede entender como de ampliación o de refuerzo según la marcha de las etapas anteriores. En todo caso, se puede plantear como una recopilación de los conocimientos adquiridos relacionándolos con otros campos del saber (interdisciplinariedad), o bien como un trabajo de la dimensión histórica de las matemáticas, e incluso con actividades específicas para el desarrollo de alguna de las competencias.

5.1. Actividad 7: Sucesión de Fibonacci

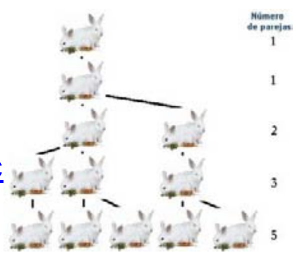
Apartado 1: En la pág. 61 de la famosa novela de Dan Brown *El código Da Vinci* aparece una versión desordenada de los primeros ocho números de Fibonacci (13, 3, 2, 21, 1, 1, 8, 5), que funcionan como una pista dejada por el conservador del museo del Louvre, Jacques Saunière.

¿Serías capaz de ordenarlos?

¿Puedes encontrar una regla de formación?

Pista: La sucesión de Fibonacci es una sucesión recurrente que se forma a partir de los dos primeros términos.

Apartado 2: La sucesión de Fibonacci venía a dar solución al siguiente problema:



INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS
REVISTA DIGITAL

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 19 – JUNIO DE 2009

"Una pareja de conejos tarda un mes en alcanzar la edad fértil. A partir de ese momento cada mes engendrará una nueva pareja de conejos, que a su vez, tras ser fértiles engendrarán otras parejas. Si en una granja al inicio de un mes hay una pareja de conejos no fértiles, ¿cuántas habrá al cabo de un determinado número de meses?"

Prueba a darle solución con 4, 8 y 12 meses.

Apartado 3: Haz una pequeña investigación sobre la relación de esta famosa sucesión con el arte y la biología, quizás te sorprendas y descubras un poco más sobre la magia de los números. (Esta actividad se puede realizar por grupos)

5.2. Actividad 8: Lectura

La India, tiempos lejanos. Habla el maharajá, complacido con el juego que uno de sus sabios le ha presentado:

— Es un juego verdaderamente maravilloso. Me entretendrá cuando no guerree contra mis vecinos y enemigos. Pídeme lo que quieras que te lo daré.

El sabio, hombre modesto si los hubiera, contestó:

— Dame 1 grano de trigo por la primera casilla del tablero del juego que tanto te ha complacido, 2 granos por la segunda, 4 por la tercera, 8 por la cuarta y así hasta completar sus 8 por 8 casillas.

El maharajá se enfureció sobremanera con el osado que le había pedido una cosa tan baladí, y dijo a su intendente:

— Dad a este perro lo que pide y arrojadlo de mi presencia.

Pasaron las horas, las mañanas, las noches, los días, y el sabio seguía allí esperando que se le diera lo que en su modestia había pedido.

Finalmente los contables y tesoreros del reino acudieron ante el maharajá al que dijeron:

— Majestad, no podemos cumplir lo que el sabio ha pedido. Ni en vuestros graneros, ni en todo el reino, ni en todo el mundo hay grano suficiente para cumplir vuestra orden.

Actividad:

Se dibuja un gran tablero de ajedrez, y cada alumno deberá ir rellenando una de las casillas con las cantidades correspondientes. Inmediatamente surgirán problemas con el tamaño del tablero… ¿Es solución agrandarlo? ¿Se puede encontrar otro modo de expresarlo?

Se les planteará que formulen una hipótesis de porqué no es posible cumplir lo prometido al sabio. A continuación, vamos a intentar descubrir cuál es el tamaño de todo lo que pidió el sabio. Para ello se partirá de una conjetura elaborada por toda la clase, ¿cuántos granos de trigo tiene un gramo? Por lo tanto, ¿cuántos kilos pidió? ¿Y toneladas?

6. BIBLIOGRAFÍA

Libros

- POLYA G. (1965), *Cómo plantear y resolver problemas*, Trillas, México
- GUZMÁN M. de (1991), *Para pensar mejor*. Editorial Labor.
- WOOD, L.E. (1988). *Estrategias de pensamiento*. Editorial Labor.
- DUNHAM, W. (1995). *El universo de las matemáticas*. Editorial Pirámide.
- KASNER, E. y NEWMAN J., (1972). *Matemáticas e imaginación*. C.E.C.S.A.

Fichas de problemas en formato electrónico

- http://ciencias.huascaran.edu.pe/modulos/m_sucesiones/guia_docente/guia1_desarrollo.htm
- http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0101-01/ed99-0101-01.html

Autoría

- Nombre y Apellidos: Patricia Pérez Ortiz
- Centro, localidad, provincia: IES Torreblanca, Sevilla, Sevilla
- E-mail: patruki957@yahoo.es