



ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 20 – JULIO DE 2009

“REPRESENTACIÓN CARTESIANA DE FUNCIONES UTILIZANDO PROGRAMAS DE GEOMETRÍA INTERACTIVA”

AUTORÍA PATRICIA PÉREZ ORTIZ
TEMÁTICA FUNCIONES. ANÁLISIS
ETAPA ESO. BACHILLERATO

Resumen

Se pretende mostrar a través de ejemplos cómo los programas de geometría interactiva pueden hacer de puente entre los territorios de la geometría y las funciones. Y más en concreto en lo que se refiere a la representación cartesiana de éstas.

Palabras clave

Variables, dependencia funcional, coordenadas y representación cartesianas.

1. INTRODUCCIÓN

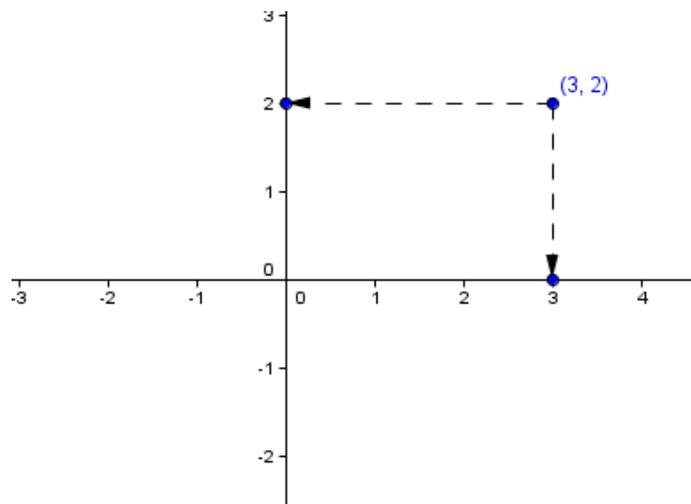
Este artículo puede considerarse como la continuación de otro publicado anteriormente en esta misma revista y que llevaba por título “*Introducción a las funciones utilizando programas de Geometría Interactiva*”. En él se exponía cómo los programas de Geometría Interactiva podían utilizarse para presentar las funciones y los conceptos a ellas asociados de forma no algebraica. Y se argumentaba que la posibilidad de desplazar los objetos libres interactivamente, arrastrándolos con el ratón, les otorgaba categoría casi de variables, permitiendo observar los cambios de forma rápida y sin cálculos previos. Aunque en general los programas de geometría interactiva no manejan variables abstractas, sino instancias concretas de las mismas, la posibilidad de modificarlas interactivamente, las convierte en un paso previo a la formalización.

Intencionadamente se dejó para un artículo posterior las repercusiones que tal tratamiento tendría sobre la representación cartesiana de las funciones. Si las funciones se consideran una de las herramientas más poderosas de la ciencia tal consideración se debe no sólo a que permiten con frecuencia trasladar al lenguaje algebraico los cambios y fenómenos que se observan en la naturaleza sino también porque permiten interpretarlos en lenguaje gráfico, visualizándolos.

INNOVACIÓN
Y
EXPERIENCIAS
EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 20 – JULIO DE 2009

Si sobre un plano, que puede simularse mediante una hoja de papel o la pantalla del ordenador, se trazan un par de ejes perpendiculares, y éstos se gradúan a partir del punto de intersección, se obtiene un sistema de referencia cartesiano en el plano. En él cada punto se define a través de un par de números, llamados coordenadas, el primero de los cuales es la proyección sobre el eje horizontal y el segundo sobre el eje vertical.



Las relaciones funcionales asocian de forma precisa y sin equívocos los valores de una variable con los de otra, así si en una tienda el dueño aplica un 20% de descuento a los precios marcados sobre los productos en venta hará corresponder a cada uno de éstos un nuevo valor. Si se adopta el convenio de representar los valores de la variable independiente, en el ejemplo anterior los precios marcados, en el eje horizontal y los de la variable dependiente, el precio con el descuento aplicado, en el vertical, cada par de valores correspondientes podría visualizarse mediante un punto del plano cartesiano. Al variar los valores de la variable independiente cambiarían los valores de la variable dependiente, de acuerdo con la ley o correspondencia definida en la función. El punto en consecuencia se movería sobre el plano cartesiano y su movimiento dejaría una huella llamada gráfica. Y en ello consiste básicamente la representación cartesiana de las funciones.

La gráfica permite en cierta forma ver “toda” la función de una vez. En aquella ésta adquiere movimiento, dinamismo. La interrelación entre los aspectos gráficos o visuales, y algebraicos u operativos es uno de los objetivos principales que debe cubrir la enseñanza de las funciones.

Existen multitud de programas que con pocas pulsaciones del ratón visualizan la gráfica de una función cuya expresión algebraica se conoce. Dichos programas “construyen” de forma automática las gráficas de las funciones, limitándose el alumno a introducir su expresión algebraica.

En la fase inicial del trabajo con funciones tales programas son menos útiles que aquellos otros que puedan permitir una labor más constructiva por parte del alumno. Están lejos los tiempos en que los alumnos tenían que construir a mano las gráficas de las funciones. En primer lugar, generalmente a partir de la expresión algebraica, se elaboraba una tabla suficientemente amplia de pares de valores, en segundo lugar se representaban los puntos correspondientes en el plano cartesiano, y finalmente si era



ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 20 – JULIO DE 2009

oportuno se unían dichos puntos con un trazo continuo. Una buena calculadora liberaba en parte del trabajo tedioso que implicaban los repetidos cálculos. Entre aquel trabajo manual y el automatismo de los programas que se emplean para “graficar” funciones hay sin duda puntos intermedios y en ellos puede radicar una mejor comprensión de los aspectos esenciales y no mecánicos que encierra la representación gráfica. Los programas de geometría interactiva son útiles para trabajar de forma intuitiva con funciones relacionadas con conceptos geométricos, y construir sus gráficas paso a paso, y ello con poco uso del cálculo.

El programa que se usará, Geogebra, es una mezcla de Geometría Interactiva y cálculo algebraico. Dispone a la par de una ventana algebraica y de una ventana gráfica. Al introducir una función en lenguaje algebraico el programa visualiza automáticamente su gráfica, y si se introduce un punto o una circunferencia o una recta de forma interactiva automáticamente crea la igualdad algebraica correspondiente.

2. PROTOCOLO A SEGUIR EN LAS ACTIVIDADES

En todas las actividades que se exponen a continuación se sigue un mismo protocolo que puede resumirse en los pasos siguientes:

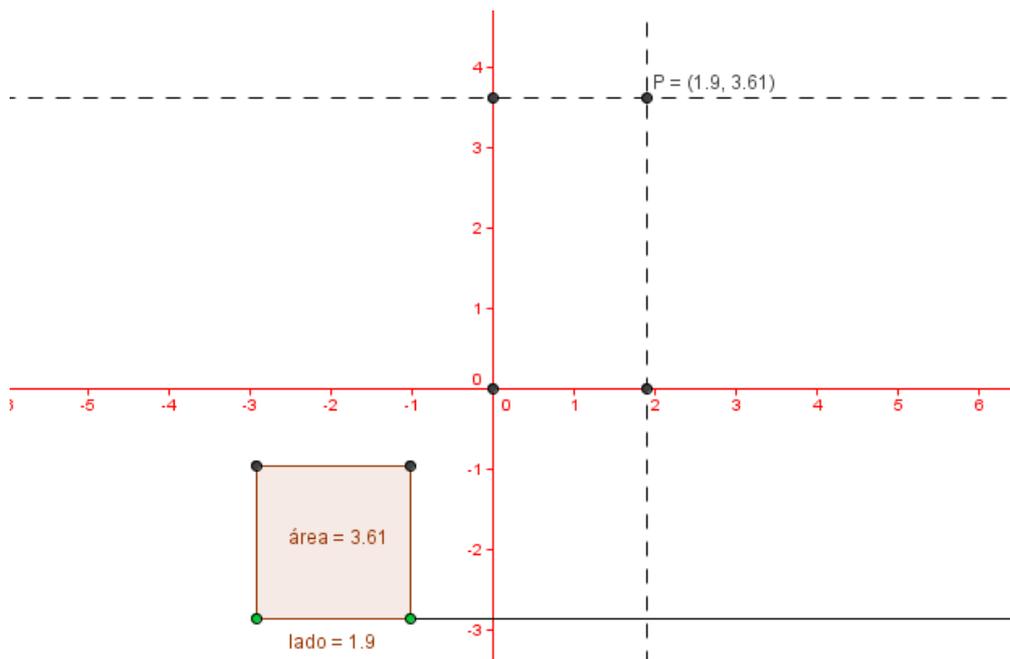
1. Construcción del modelo geométrico sobre el que verse la actividad, reflejando en el mismo las variables independiente y dependiente. Estos aspectos han sido tratados en el artículo de esta misma revista citado anteriormente por lo que en el presente no se insistirá en ellos.
2. Traslación al plano cartesiano en las etapas:
 - a. Mostrar los ejes. En Geogebra éstos se muestran por defecto, si bien pueden ocultarse o mostrarse a partir de una opción presente en el menú **visualiza**.
 - b. Transferencia de la variable independiente (x) al primer eje. Si se trata de una variable de tipo geométrico puede transferirse su valor al primer eje mediante el compás (**circunferencia dado su centro y su radio**) con centro (0,0) y radio 'x', o de forma más sencilla tecleando en la ventana algebraica (**x,0**), donde 'x' designa la etiqueta empleada para la variable independiente.
 - c. Transferencia de la variable dependiente (y) al segundo eje. Si se trata de una variable de tipo geométrico puede transferirse su valor al segundo eje de nuevo mediante el compás (**circunferencia dado su centro y su radio**) con centro (0,0) y radio 'y', o de forma más sencilla tecleando en la ventana algebraica (**0,y**), donde 'y' designa la etiqueta empleada para la variable dependiente.
 - d. Trazado de las rectas perpendiculares a los ejes por x e y.
 - e. Punto P de intersección de las rectas anteriores.
 - f. Visualización de las coordenadas del punto.
3. Una vez completados los pasos anteriores están colocadas todas las piezas fundamentales para “ver” la gráfica de la función, en tres niveles distintos:

- a. Moviendo el objeto geométrico al cual está asociada la variable independiente y observando el movimiento del punto P, lo que en muchos casos permite adivinar cómo será la gráfica. Puede también ocultarse el modelo geométrico y las etiquetas o rótulos que acompañan a las variables dejando siempre visibles los puntos que permiten el movimiento interactivo y las coordenadas del punto P. Si se desea pueden ocultarse éstas y en su lugar otorgar etiquetas a los puntos proyección sobre los ejes. De esta forma irá adquiriendo relevancia por sí misma la gráfica de la función, desligándose de la compañía del objeto geométrico.
 - b. Idem activando la traza del punto P y observando su huella.
 - c. Construyendo el **Lugar Geométrico** definido por P y por el objeto geométrico al que está asociada la variable independiente.
4. Finalmente, es el momento de preguntar, incentivando las respuestas apoyadas en razonamientos gráficos, sobre puntos concretos, por ejemplo puntos de corte con los ejes, sobre si la relación es creciente o decreciente, si existen valores máximos o mínimos, si la relación es o no de proporcionalidad directa, afín, cuadrática...

3. ACTIVIDAD 1

Construye un modelo geométrico que muestre las medidas del lado y de la superficie de un cuadrado. Representa además la dependencia entre dichas medidas en el orden dado.

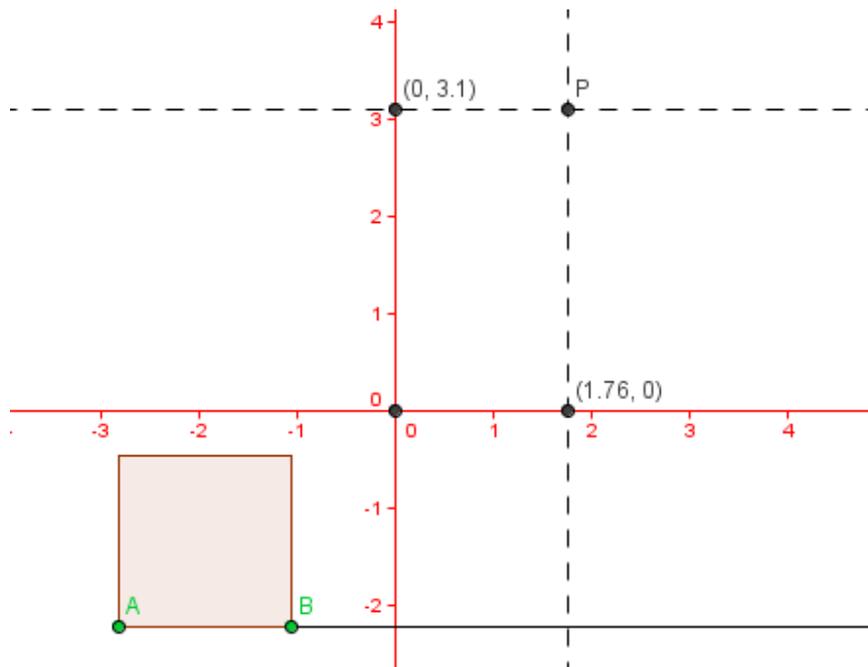
Una vez completadas las dos primeras fases del protocolo anteriormente descrito podría obtenerse una construcción similar a la que sigue:



El cuadrado de la parte inferior con sus variables lado y área es el modelo geométrico pedido. La construcción depende de los puntos en color verde (para indicar que son libres). Al arrastrar estos puntos cambia el valor del lado, y en consecuencia el del área, y también la posición de P en el plano cartesiano.

En este punto se deberían plantear al alumno sencillas cuestiones del tipo: *¿Cuál es el área de un cuadrado de lado 2,4 cm?* Es oportuno que el alumno observe el distinto lenguaje que proporcionan el modelo geométrico y la representación gráfica, y la interrelación entre ambos.

A continuación puede pasarse a una construcción retocada en la que el modelo geométrico casi haya desaparecido y cobre más importancia la representación gráfica. Puede practicarse el juego de permitir o no visualizar los rótulos del punto P y de sus proyecciones sobre los ejes. Se deberían volver a reformular las mismas preguntas que en el nivel anterior.

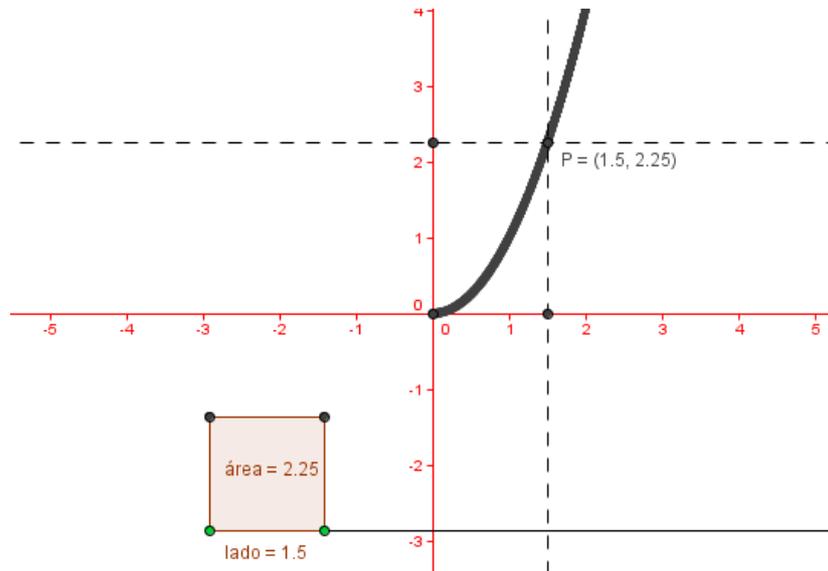


Si se pulsa con el botón derecho del ratón sobre el punto P aparece un menú contextual una de cuyas opciones es **Activa trazo**. Una vez confirmada ésta al arrastrar los puntos verdes el punto P al moverse dejará su huella impresa en la pantalla.

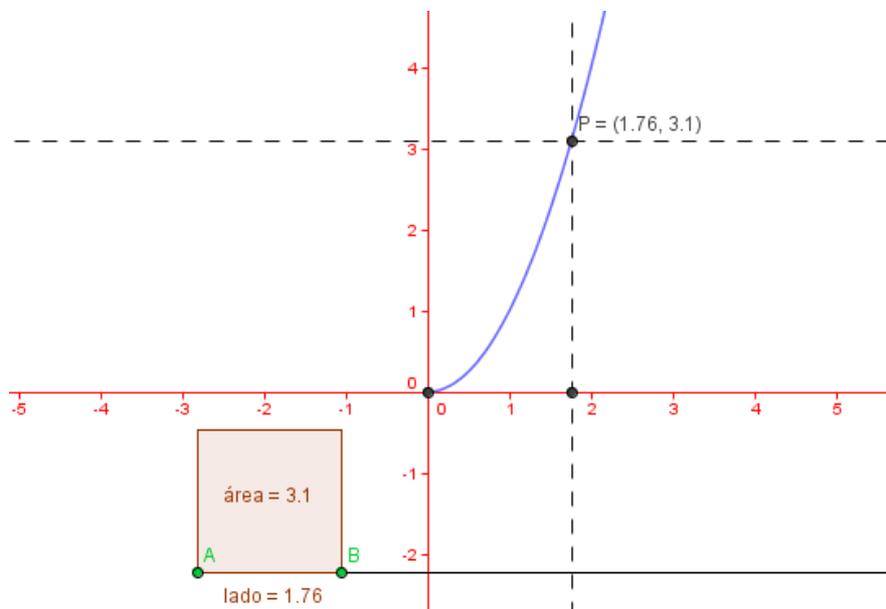


INNOVACIÓN
Y
EXPERIENCIAS
EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 20 – JULIO DE 2009



Al final del desarrollo de la actividad puede generarse la gráfica de forma más inmediata recurriendo al modo **Lugar geométrico**, el cual exige la elección en primer lugar del punto P generador del lugar y a continuación del punto libre B.



Ahora es el momento de formular preguntas en contexto para cuya respuesta el uso de los razonamientos de tipo gráfico:

1. ¿Cuál es el área del un cuadrado cuyo lado mide 2,18 cm?
2. ¿Cuál es el lado de un cuadrado de área 6 cm^2 ?
3. ¿Aumenta el área al aumentar el lado?

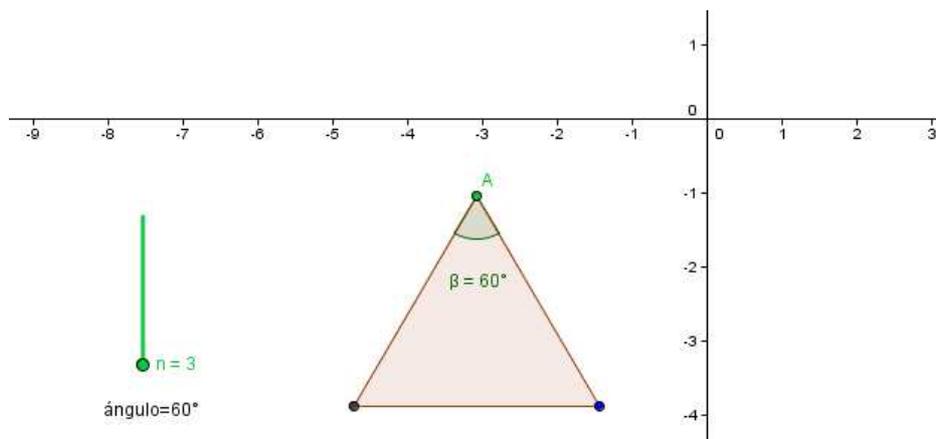
4. ¿Disminuye el área al disminuir el lado?
5. ¿Existe algún cuadrado cuya superficie sea máxima? ¿y mínima?
6. En los cuadrados ¿la medida del lado y de su superficie son magnitudes directa o inversamente proporcionales? En caso afirmativo ¿cuál es la constante de proporcionalidad?
7. ¿Llamarías lineal a la función que expresa el área de un cuadrado en función de su lado?
8. Busca qué nombre recibe la curva o gráfica anterior.
9. ¿Es posible expresar de forma funcional la relación entre el área del cuadrado y la medida de su lado, en este orden?

5. ACTIVIDAD 2

Construye un modelo geométrico que muestre el número de lados de un polígono regular y la medida de cualquiera de sus ángulos. Representa la dependencia entre el número de lados del polígono regular y la medida de sus ángulos.

La representación cartesiana de la dependencia anterior con seguridad planteará la necesidad de adoptar diferentes escalas en los ejes, lo que acarreará la deformación “visual” de las construcciones geométricas. Al adoptar diferentes escalas en los ejes los cuadrados, los polígonos regulares ya no parecerán tales. Se hace necesario, pues, en aras de una adecuada representación renunciar en cierta medida al modelo geométrico atendiendo más al valor de las variables que al aspecto del modelo geométrico que debe pasar a un segundo plano.

Para llevar a cabo esta actividad se apoyará la construcción en un deslizador que designe el número de lados y a partir del mismo se obtendrá la medida de los ángulos interiores del polígono regular correspondiente.



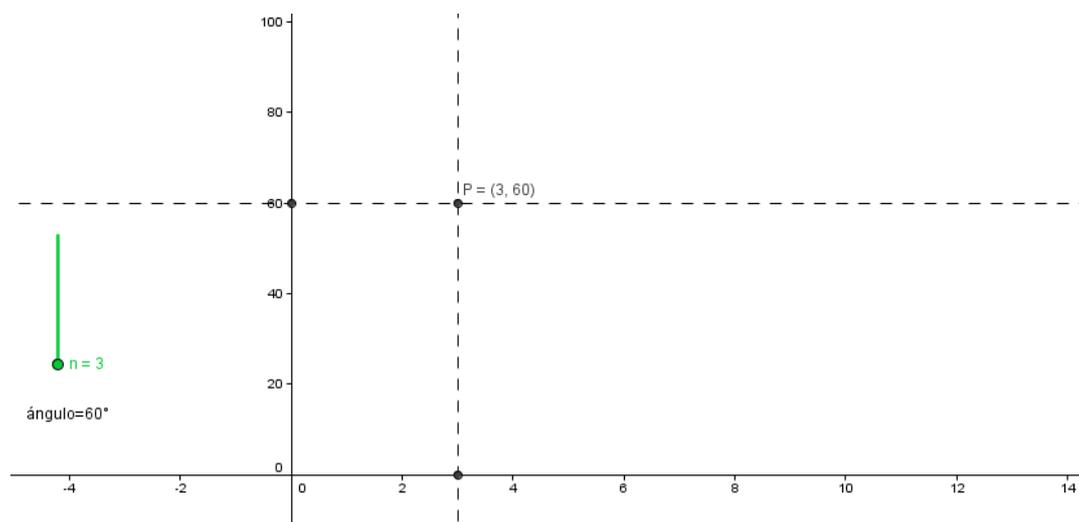
Si se cambia la escala del segundo eje, mediante el menú contextual que aparece al pulsar sobre él con el botón derecho del ratón, con objeto de representar la medida de los ángulos interiores se observará con sorpresa que el triángulo equilátero se deforma, lo que obliga por estética a su ocultamiento.

**INNOVACIÓN
Y
EXPERIENCIAS
EDUCATIVAS**

ISSN 1988-6047

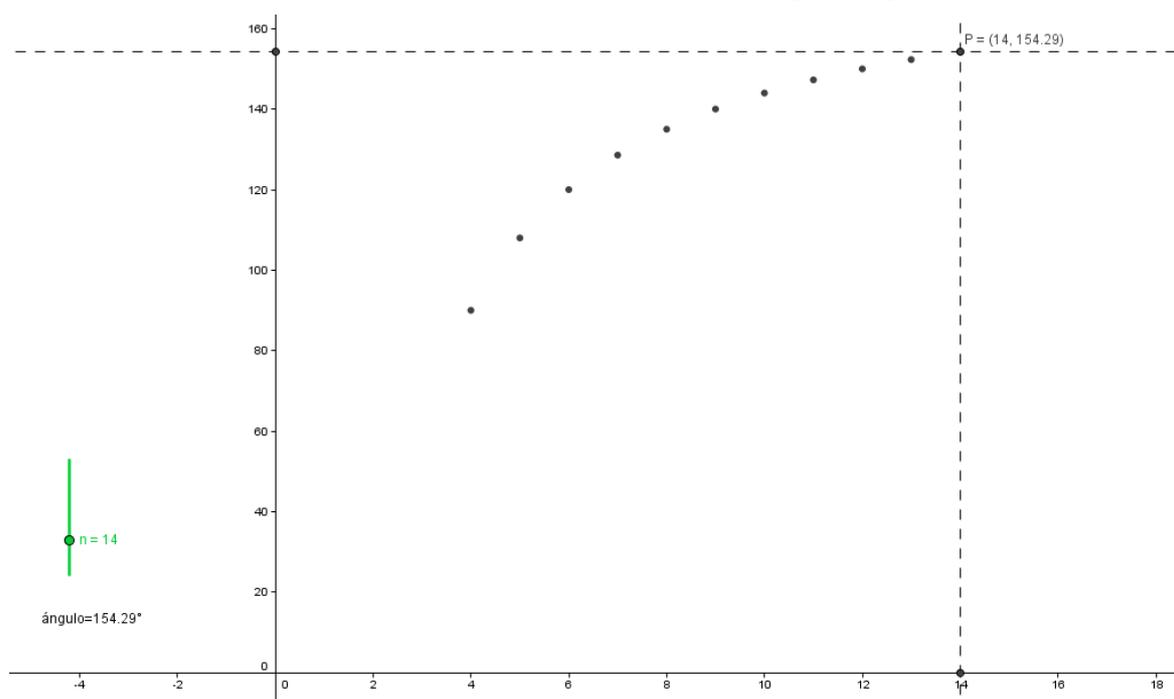
DEP. LEGAL: GR 2922/2007

Nº 20 – JULIO DE 2009



La construcción depende del deslizador, en verde. El ángulo se ha obtenido a partir del polígono regular que permanece oculto. Se deberían plantear al alumno sencillas cuestiones como: *¿Cuánto mide el ángulo interior de un polígono de 13 lados?* Con objeto de insistir en la información que proporciona la representación cartesiana pueden ocultarse el rótulo del deslizador y el texto que lo acompaña, así como el rótulo del punto P o los de sus proyecciones sobre los ejes.

Si se activa la traza de P, al desplazar el punto del deslizador, surgirá la gráfica de la función.



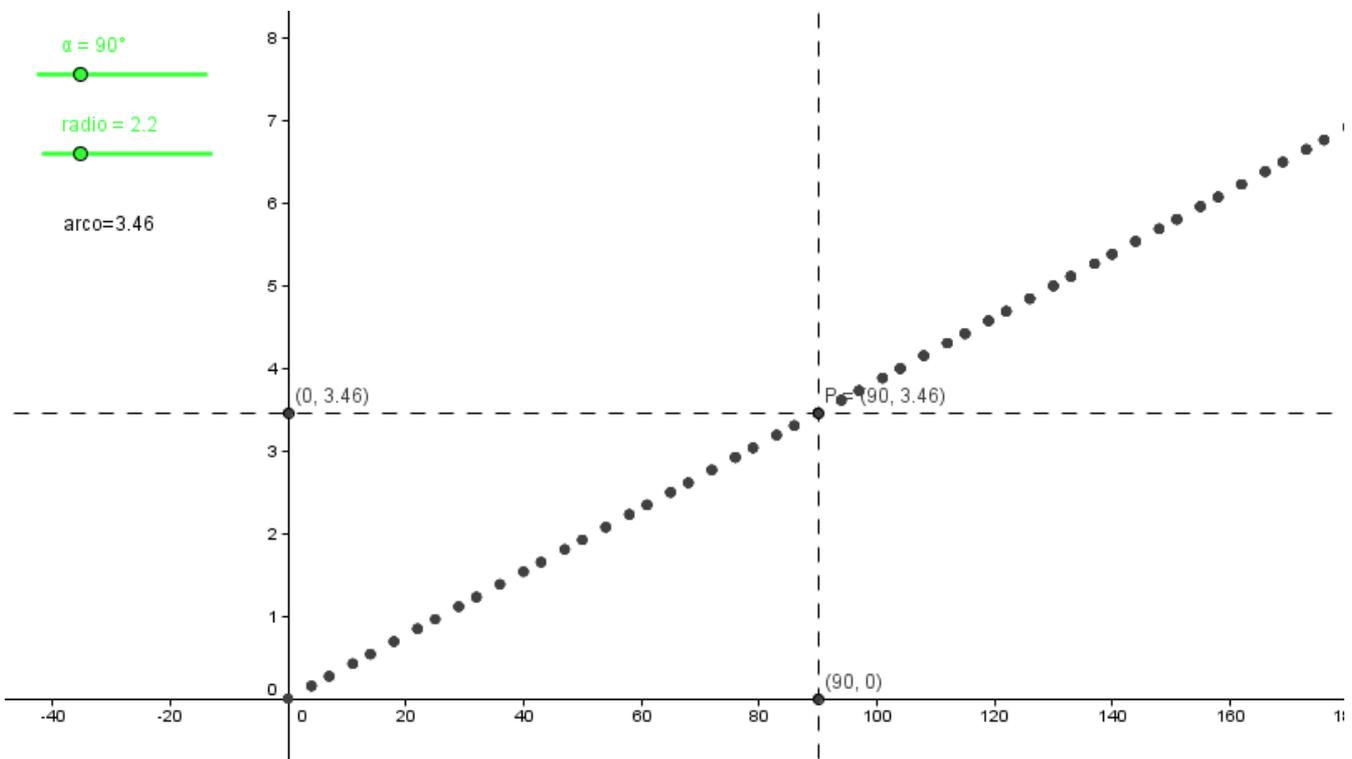
De nuevo ante ella pueden formularse preguntas como:

1. ¿Qué valores puede tomar el número de lados de un polígono regular?
2. ¿Aumenta el ángulo interior al aumentar el número de lados de un polígono regular?
3. ¿Disminuye el ángulo interior al disminuir el número de lados?
4. ¿El ángulo interior alcanza un valor máximo? ¿y mínimo?
5. En los polígonos regulares ¿el número de lados y la medida de sus ángulos directa o inversamente proporcionales? En caso afirmativo ¿cuál es la constante de proporcionalidad?
6. ¿Llamarías lineal a esta función?
7. ¿Es posible expresar de forma funcional la relación entre el ángulo interior y el número de lados de un polígono regular, en este orden?

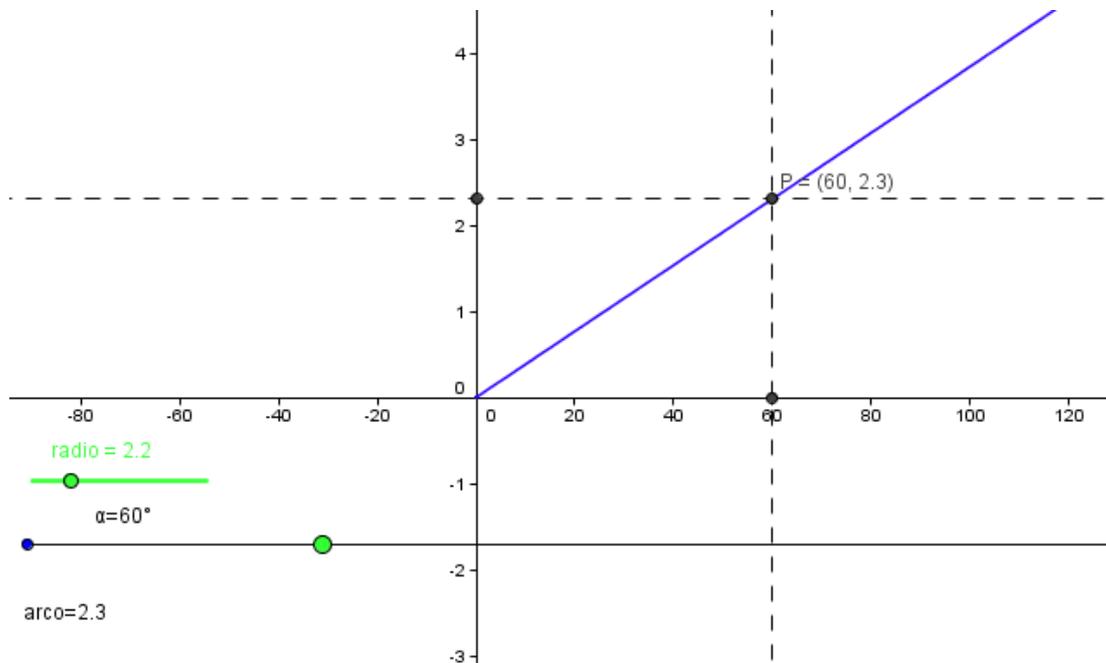
6. ACTIVIDAD 3

Construye un modelo geométrico que en una circunferencia de radio fijo muestre la medida de un arco y del ángulo correspondiente. Estudia la relación existente entre el ángulo central y la medida del arco correspondiente en una circunferencia de radio fijo.

En general de nuevo la representación gráfica nos retrotraerá a problemas de escala. Recurriendo a la técnica empleada en la actividad anterior se obtendrá una construcción similar a la siguiente:



Lo más destacado de la representación anterior es su carácter lineal, y la proporcionalidad directa de sus variables, lo que invita a preguntarse por la constante de proporcionalidad. Es posible que la representación anterior ocasione cierto nivel de insatisfacción para cuya solución se intente recurrir a los lugares geométricos. Sin embargo Geogebra no admite en éstos la invocación de deslizadores, lo que fuerza a replantearse la construcción desde el principio. A continuación se ofrece una construcción alternativa:



7. COMENTARIO FINAL

Antes se ha mencionado el carácter dual de Geogebra mitad algebraico mitad gráfico. Si el profesor o el alumno introduce en la ventana situada en la parte inferior de la pantalla que lleva la etiqueta 'Entrada' una fórmula o expresión algebraica, por ejemplo $y=x^2$, acto seguido aparecerá en la ventana gráfica la representación cartesiana de la función. A partir de dicho momento podrá ser tratada como un objeto geométrico. En él podrán definirse puntos que se moverán libremente por el mismo arrastrándolos con el ratón. Según convenga dichos puntos mostrarán u ocultarán sus etiquetas o rótulos que contienen información numérica. No cabe duda que tal hecho constituye una herramienta poderosa y versátil en la enseñanza de muchos ítems de la matemática, como aquí se ha puesto de manifiesto con las funciones.



ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 20 – JULIO DE 2009

8. BIBLIOGRAFÍA

- Azcárate C. y Deulufeu J (1989). *Funciones y gráficas*. Madrid. Edit: Síntesis
- Shell Centre for Mathematical Education (1985). *El lenguaje de las funciones y gráficas*. Madrid. MEC

Autoría

- Nombre y Apellidos: Patricia Pérez Ortiz
- Centro, localidad, provincia: IES Torreblanca, Sevilla, Sevilla
- E-mail: patruki957@yahoo.es