REVISTA DIGITAL INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 20 – JUNIO DE 2009

"RAZONAMIENTOS LÓGICOS EN LOS PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS"

AUTORÍA **SERGIO BALLESTER SAMPEDRO**
TEMÁTICA **MATEMÁTICAS**
ETAPA **ESO, BACHILLERATO**

Resumen

En este artículo comienzo definiendo proposición y los distintos tipos de proposiciones para más tarde comenzar con el cálculo proposicional introduciendo los conectores lógicos de la conjunción, disyunción, implicación y equivalencia.

Se trata el razonamiento en matemáticas, viendo que las reglas de inferencia son fundamentales en la construcción de las matemáticas y se ha visto las aplicaciones de la lógica en otras ramas que no son puramente matemáticas.

Palabras clave

Proposición

Conector

Conjunción

Disyunción

Implicación

Equivalencia

1. INTRODUCCIÓN:

Se puede considerar que ha habido durante las historia tres etapas en las que se ha desarrollado la lógica proposicional:

- La lógica griega
- La lógica escolástica
- La lógica matemática

INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS
REVISTA DIGITAL

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 20 – JUNIO DE 2009

En la lógica griega se usaban para las fórmulas lógicas el lenguaje ordinario, fue tratada por Aristóteles como su principal referente. En la segunda etapa se produjo una abstracción del lenguaje ordinario y se empleó unas reglas especiales del lenguaje para la lógica.

En la tercera etapa la lógica ya usa un lenguaje especial donde sus reglas ya son precisas para los signos y palabras usados, su principal autor fue Leibnitz, aunque el padre de la lógica matemática fue Boole, que construyó el "álgebra de Boole" que es a la vez el álgebra de los conjuntos y el álgebra de la lógica.

Así pues, la lógica moderna que fue formándose desde finales del siglo XIX se fundamentaba principalmente en que no utilizaba el lenguaje ordinario, utilización de una simbología adecuada con la que se puede realizar los cálculos lógicos.

2. LÓGICA PROPOSICIONAL:

La base de la lógica proposicional es lo que se conoce como proposición. Esto no es más que un enunciado que atribuye una propiedad a un objeto o conjunto de objetos.

Cada parte de un enunciado se llama término, por tanto, una proposición lógica es una secuencia de términos con significado y que sea verdadera o falsa, pero no ambas a la vez.

Los enunciados de las proposiciones se suelen escribir con letras minúsculas: p, q, r…

Destacamos dos clases de proposiciones lógicas:

- Atómica, primaria o simple: no se pueden descomponer en enunciados más sencillos y que sigan siendo proposiciones.
- Molecular o compuesta: esta formada por dos o varias proposiciones atómicas.

A los términos que sirven como enlace para formar proposiciones compuestas se llaman conectores lógicos. Así según el conector lógico utilizado, podremos definir las siguientes proposiciones:

- Conjunción de proposiciones: una proposición molecular se llama conjunción de p y q si estas dos proposiciones se enlazan por el término y, y que representamos por $p \wedge q$. la conjunción $p \wedge q$ será verdadera cuando lo sean p y q, en los demás casos será una proposición falsa.
- Disyunción de proposiciones: una proposición molecular se llama disyunción de p y q si estas dos proposiciones se enlazan por el término o, y que representamos por $p \vee q$. la disyunción $p \vee q$ será verdadera cuando lo sea, al menos, una de las dos proposiciones, y será falsa si lo son las dos a la vez.
- Implicación de proposiciones. Una proposición molecular se llama implicación de p y q, si estas dos proposiciones se enlazan por el término si…entonces…, y que representamos por $p \rightarrow q$. a p

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 20 – JUNIO DE 2009

se le llama hipótesis o condición y a q tesis o conclusión. Una implicación es falsa cuando de una hipótesis verdadera se saca una conclusión falsa.

- Implicación recíproca: si tenemos la implicación p→q entonces a la implicación q→p se le llama implicación recíproca de la anterior. Entonces si la impliación p→q es cierta, q→p puede ser cierta o falsa.
- Equivalencia de proposiciones. si tenemos que dos proposiciones p y q se implican mutuamente, p→q y q→p entonces se dice que son equivalentes y se escribe p↔q. El símbolo ↔ se lee sí y sólo sí. La equivalencia p↔q es verdadera si las dos proposiciones p y q son verdaderas a la vez o falsas a la vez.

2.1. Cálculo proposicional:

A toda proposición le corresponde un elemento del conjunto {verdadero, falso}.a estos elementos se les llama valores de verdad y se les representa por:

0—si la proposición es falsa

1—si la proposición es cierta

por tanto a una proposición p se le puede representar por su tabla de verdad:

$$p \rightarrow \begin{cases} 0 \ si \ es \ \ falsa \\ 1 \ si \ es \ verdadera \end{cases}$$

dos proposiciones son equivalentes p≡q si tienen el mismo valor de verdad.

Según los valores de verdad de las proposiciones simples dependerá el valor de verdad de la proposición molecular.

Para una mayor comodidad a la hora de calcular el valor de verdad de una proposición molecular creamos lo que se llama tabla de verdad, en la que colocamos los valores de verdad de las proposiciones atómicas y calculamos según los conectores.

Así pues, podemos definir los conectores lógicos mediante sus tablas de verdad:

Las letras p, q, r… son las proposiciones atómicas y el 0 y 1 representa el falso y verdadero respectivamente.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 20 – JUNIO DE 2009

- Conjunción:

p	q	p^q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

La conjunción es verdadera cuando p y q son verdaderas, y en los demás casos es falsa.

Es el conector lógico y.

- Disyunción:

p	q	p^q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Es el conector lógico o.

La disyunción es verdadera si al menos una de las dos proposiciones p y q es verdadera, y la disyunción es falsa sólo si ambas lo son.

- Implicación:

p	q	p→q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 20 – JUNIO DE 2009

Es el conector lógico si…entonces…

La implicación es falsa sólo cuando la hipótesis o antecedente es verdadero y la conclusión o consecuente es falso, y será la implicación verdadera en los demás casos.

- Equivalencia:

p	q	p↔q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

La equivalencia es verdadera si las dos proposiciones son ambas verdaderas o ambas falsas, y la equivalencia es falsa en los demás casos.

- Disyunción exclusiva:

p	q	pΔq
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Es un conector lógico que da lugar a la proposición p o q, pero no ambas.

La disyunción exclusiva es falsa si ambas son verdaderas o ambas falsas, y será verdadera en los demás casos.

- Negación:

La estudiaremos más detenidamente:

Se llama negación de una proposición p y se escribe ¬p, no p, a la proposición contraria de p.

Si p es cierta tenemos que ¬p es falsa y si p es falsa tenemos que ¬p es verdadera.

Tenemos la tabla de valores de verdad.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 20 – JUNIO DE 2009

p	¬p
1	0
0	1

3. APLICACIONES DE LA LÓGICA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS:

Para llevar a cabo una teoría matemática, es necesario que partamos de unas definiciones iniciales con las que podemos trabajar con ciertos elementos llamados términos primitivos, como por ejemplo punto, ángulo, recta, etc., también para poder realizar una teoría matemática existen lo que se llama axiomas, que son reglas para emplear los términos primitivos, éstos no necesitan demostración, por ejemplo los axiomas de Peano. Todo esto se relaciona con razonamientos lógicos. Luego, a partir de las definiciones y axiomas obtenemos los teoremas por procesos de demostración o deducción y así por último se obtienen las consecuencias o corolarios para completar la teoría matemática.

Ahora, vamos a ver los pasos válidos que hay que dar para desarrollar una teoría matemática, el razonamiento lógico consta también de unos términos primitivos que son las proposiciones lógicas y los conectores lógicos, y también de una reglas de inferencia lógica.

Para comenzar veremos alguna de las reglas de inferencia, éstas son reglas que permiten ir haciendo el razonamiento lógico, es decir, obtener la conclusión a parir de unas proposiciones llamadas premisas. Estas reglas son tautologías con las que realizamos el paso de las premisas a la conclusión. Una inferencia lógica es válida cuando en el paso de las premisas a la conclusión se usan las reglas de inferencia de forma adecuada, con lo que si las premisas son verdaderas la conclusión que se obtiene a través de una inferencia correcta, debe ser verdadera.

Entonces no podemos obtener una conclusión falsa de unas premisas verdaderas con un razonamiento válido.

Las reglas de inferencia lógica son:

- Reglas de separación:
  - Ley de modus ponens: $[(p \to q) \wedge p] \Rightarrow p$

    El silogismo lo ponemos como:

    Premisa 1: p1: $p \to q$

    Premisa 2: p2: p

    Conclusión: c: q

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 20 – JUNIO DE 2009

- Ley de modus tollens: $[(p \to q) \wedge (\neg q)] \Rightarrow (\neg p)$

  El silogismo lo ponemos como:

  Premisa 1: p1: p→q

  Premisa 2: p2: ¬q

  Conclusión: c: ¬p

- Regla de unión: $(p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge q)$

  El silogismo lo ponemos como:

  Premisa 1: p1: p

  Premisa 2: p2: q

  Conclusión: c: $p \wedge q$

- Regla del silogismo: $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \Rightarrow p \to r$

  El silogismo lo ponemos como:

  Premisa 1: p1: p→q

  Premisa 2: p2: q→r

  Conclusión: c: p→r

Ahora vamos a prestar atención a la parte de la demostración de la teoría matemática. El proceso de demostración o deducción lógica es pasar de las premisas a la conclusión, para ello debemos utilizar las reglas de inferencia lógica antes vistas.

Los métodos de demostración de un teorema son los pasos a dar desde una hipótesis hasta una conclusión que se debe deducir de las hipótesis, y para estos pasos hemos de usar las reglas de inferencia lógica.

Puede ocurrir que partiendo de premisas o hipótesis falsas lleguemos a una conclusión verdadera o falsa cuando se aplican correctamente las reglas de inferencia durante los pasos de deducción. Pero nunca ocurrirá que de premisas verdaderas se llegue a una conclusión falsa. Así pues, podemos decir que es correcto un razonamiento lógico cuando a partir de premisas verdaderas llegamos a una conclusión también verdadera.

Para finalizar, vamos a ver otras aplicaciones de la lógica proposicional:

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 20 – JUNIO DE 2009

Posiblemente uno de los usos más importante en el que se haya aplicado la lógica sea en el diseño de ordenadores a través de los circuitos con interruptores, pues se asigna el valor 1 cuando el interruptor está cerrado (pasa corriente) y el valor 0 cuando el interruptor está abierto (no pasa corriente).

También al conectar dos interruptores en serie se corresponde con la conjunción, ya que para que pase corriente por el circuito deben estar los interruptores en serie con el valor 1, pero si están conectados en paralelo (disyunción) para que haya corriente es suficiente con que un interruptor este con el valor 1.

Es común en la rama de la electrónica el realizar una tabla de verdad para los circuitos con cierta complejidad en los que combinando sus valores podemos ver cuando en el circuito pasa la corriente y cuando no pasa.

4. APLCACIONES EN EL AULA:

El uso de un razonamiento lógico contiene cálculos matemáticos, capacidad para resolver problemas de matemáticas y hallar una correcta solución, capacidad para comprender relaciones entre las matemáticas y la vida real, manejar conceptos concretos y abstractos y ser capaz de proponer hipótesis.

La lógica en el aula debe ayudar al alumnado en ordenar de forma correcta la información y ser capaz de manejar diferentes recursos para poder resolver diferentes problemas de cualquier área de matemáticas sin que muchas veces sea necesario el desarrollo matemático con todo el conjunto de cálculos precisos.

Se recomienda emplear actividades para fomentar el uso de la lógica donde aparezcan acertijos, adivinanzas y otros ejercicios en los que no sea su prioridad el desarrollo matemático sino en uso y fomento de destrezas lógicas.

Para “entrenar” al alumno/a en el uso de la lógica-matemática, es fundamental que sean capaces de formular preguntas coherentes, y que ayudan en la resolución del ejercicio propuesto. Estas preguntas servirán para comparar diferentes ejercicios, identificar partes de ellos, organizar y clasificar, usar distintos enfoques lógicos.

Así pues, frente a una negación o afirmación se puede dirigir el razonamiento lógico, buscar otras alternativas, reflexionar sobre la solución obtenida y los procesos lógicos empleados, aprender de los errores cometidos, ser capaz de predecir otras soluciones si variamos los procesos, promover que los compañeros hagan otras preguntas y cuestiones y poder explicar los razonamientos lógicos empleados.

Los alumnos/as podrán de esta manera mejorar en el razonamiento abstracto, en la resolución de problemas y realizar cálculos matemáticos elevados.

Así fomentaremos el razonamiento deductivo e inductivo, tratar de forma natural conceptos abstractos.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 20 – JUNIO DE 2009

Las actividades que podremos utilizar en el aula serán las enfocadas a razonar deducir criterios, operar con conceptos abstractos como los algebraicos, simbólicos. Relacionar conceptos dentro de la materia de matemáticas y con otras. Resolver problemas como puzzles, gráficos, geométricos.

Actividades:

Sudoku:

1			3
		1	
	1		

Cuadrado mágico:

Un Cuadrado Mágico es un cuadrícula en la que se disponen números, habitualmente desde el 1 hasta el número de casillas, de forma que el resultado de la suma de los números de una fila, columna o diagonal principal siempre es el mismo.

Completa el siguiente cuadrado mágico si deben sumar 15:

Posible solución:

8	3	4	=15
1	5	9	=15
6	7	2	=15
= 15	= 15	= 15	

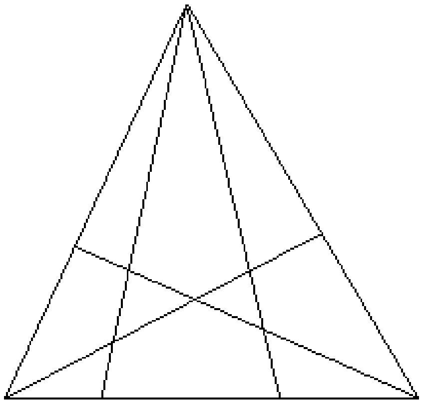
Este es un ejercicio en el que hay una gran variedad de posibles soluciones.

Ejercicios lógico-matemáticos:

Con este tipo de ejercicios se busca el estudio de propiedades de distintos objetos. Para ello se propone ejercicios a los alumnos/as en los que tengan que reconocer propiedades de los objetos.

¿Cuántos triángulos contiene la siguiente figura?

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 20 – JUNIO DE 2009



5. BIBLIOGRAFÍA:

- Boyer, C. (2007). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial, S.A.
- Rey Pastor, J. Babini, J. (1951). *Historia de la matemática*. Argentina: Espasa-Calpe S.A.
- Martínez Freire, P. F. (1975). *Lógica Matemática*. Madrid: Biblioteca Matemática.

Autoría

- Nombre y Apellidos: Sergio Ballester Sampedro
- Centro, localidad, provincia: IES López Neyra, Córdoba, Córdoba
- E-mail: sballess@yahoo.es