REVISTA DIGITAL
INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 21 – AGOSTO DE 2009

“LA EXPERIENCIA DEL AZAR”

AUTORÍA **CATALINA PONCE HUERTAS**
TEMÁTICA **MATEMÁTICAS**
ETAPA **ESO**

Resumen

El tratamiento del azar tiene distintas aplicaciones tanto en el mundo de las Ciencias Naturales y de la Salud como en el de las Ciencias sociales, entre otras, por lo que el alumnado de la E.S.O. deberá desarrollar la intuición sobre lo incierto, lo que le permitirá razonar sobre el posible resultado de fenómenos o experiencias en las que interviene el azar, o sobre lo plausible de resultados ya obtenidos.

Palabras clave

Azar

Probabilidad

1. ¿QUÉ SE ENTIENDE POR AZAR?

El cálculo de probabilidades es la parte de la Matemática que se ocupan de los fenómenos en los que interviene el azar.

Para responder a la pregunta ¿qué se entiende por azar?, resulta conveniente compararlo con su idea opuesta: la necesidad.

Los fenómenos gobernados por la necesidad son aquellos en los que una misma causa, determina un efecto inevitablemente. Por ejemplo, las afirmaciones siguientes, muestran fenómenos regidos por la necesidad:

1. Si lanzamos hacia arriba una piedra y no hay nada que la detenga, la piedra cae al suelo.
2. Si un líquido se calienta lo suficientemente, se evapora.

REVISTA INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS DIGITAL

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 21 – AGOSTO DE 2009

La necesidad también puede ser lógica, si se nos presenta como un producto del razonamiento por ejemplo:

3. Si un número entero es divisible por 3, su cuadrado es divisible por nueve.
4. El perímetro de un cuadrado cualquiera equivale a multiplicar un lado del cuadrado por cuatro.

De manera que todas las leyes naturales o leyes empíricas, producto de la observación e inducción de la realidad, son ejemplos de necesidad física, mientras que las leyes teóricas, producto de la deducción lógica son ejemplos de necesidad lógica.

A los fenómenos regidos por la necesidad, se les denomina fenómenos deterministas.

Frente a este tipo de fenómenos nos encontramos con otros que atribuimos al azar, es decir, que pueden ocurrir y pueden no ocurrir, como por ejemplo:

- Si lanzamos un dado sobre una mesa, con seguridad quedará hacia arriba una de sus seis caras, pero no podemos predecir el número de puntos que aparecerá en esta cara. Diremos entonces, que el número que aparece en la cara superior del dado, al lanzarlo, es una acontecimiento aleatorio, es decir, sometido al azar.
- Si en una bolsa hay bolas del mismo tamaño, pero difieren en el color, y tomamos una bola a ciegas, no podemos asegurar el color de la bola que extraigamos de la bolsa, este suceso también se dice que depende del azar.
- El número de separaciones matrimoniales, nacimientos, etc., en un mes o en un año, también son acontecimientos aleatorios.

2. LA INTUICIÓN DE LA PROBABILIDAD

Como hemos enunciado en el apartado anterior, la necesidad se presenta ligada a la certeza o seguridad, así decimos:

1. Es seguro que una piedra caerá si le falla el soporte.
2. Es un hecho cierto que toda persona humana es mortal.

De manera similar, el azar se asocia con la noción de probabilidad y decimos:

3. Es probable que al lanzar una moneda sobre una mesa salga cara.
4. Es probable que los tipos de interés en un banco bajen.

En este sentido, la probabilidad indica una apreciación de la facilidad que se le atribuye a que ocurra un cierto acontecimiento aleatorio o una medida del grado de creencia en la aparición de un cierto acontecimiento.

Nosotros, tendemos de una manera más o menos inconsciente a pensar que unos acontecimientos son más verosímiles que otros y sentimos el deseo de medir esa verosimilitud.

REVISTA DIGITAL INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 21 – AGOSTO DE 2009

De modo que si:

- En una bolsa tenemos dos bolas iguales en tamaño, pero una de color blanco y otra de color rojo, de antemano, tendemos a creer, casi instintivamente, que al meter la mano en la bolsa y sacar una bola, hay la misma posibilidad de sacar la bola blanca que sacar la bola roja.

- Pero si en la bolsa tenemos once bolas iguales en todo salvo en el color, de manera que hay diez bolas blancas y una roja, al tomar una bola de la bolsa a ciegas, parece más probable que la bola elegida sea una bola blanca.

Hasta este momento, nuestra capacidad de medir la probabilidad se limita a decidir si la probabilidad de que ocurra algo es mayor o menor que la probabilidad de que ocurra otra cosa.

Para ir más lejos y hacer una teoría de la probabilidad, habrá que reflexionar sobre nuestra experiencia del azar con el alumnado.

3. LA IDEA DE PROBABILIDAD

La experiencia del azar nace de observar que cuando se repiten ciertos experimentos, en condiciones idénticas, el resultado es impredecible.

El hombre ha aprovechado, desde tiempos remotos, esta circunstancia para inventar los *juegos de azar*, lanza monedas, dados, elige naipes, gira la ruleta, y colecciona sus resultados reflexionando sobre ellos con la esperanza de hallar la clave de su fortuna.

Este comportamiento despierta en el alumnado un sentimiento de exaltación, pero más interés les produce pensar que existe una explicación razonable y rigurosa del fenómeno, y comienzan a preguntarse que cómo es posible que el azar esté sometido a una ley.

La clave del modelo del comportamiento del azar es el concepto ideal de probabilidad, concepto que goza de la misma cómoda propiedad que otros conceptos elementales de la Matemática: es indefinible.

Ser indefinible no implica que no pueda darse razón de su existencia, ni orientar a la intuición acerca de su sentido, sino que no puede esperarse una definición formal, Euclides ya mostraba esta posibilidad, afirmando que un punto y una línea eran indefinibles, sin embargo también afirmaba que un punto es lo que no tiene parte y una línea es una longitud sin anchura.

Para buscar una explicación a la probabilidad indefinible, dejamos al alumnado lanzando una y otra vez una moneda sobre la mesa, y le pedimos que vaya anotando sus resultados con la esperanza de hallar en las series de resultados una pauta predecible del comportamiento del azar.

Se le pide que anote el resultado de cien lanzamientos y que los anote en el cuaderno, por ejemplo:

CC++CC+++CC++++CCCCC

CC++CCCCCCC+++C+++++

C+C++++CC++++CCCCC++

C+++++CC++C+C+CCC+++

C+C+C++C+++C++++CCC+

Lo primero que el alumno o alumna debe observar es que hay, aproximadamente, tantas caras como cruces (hay 46 caras y 54 cruces); este resultado parece concordar con la sensación de que es tan fácil que salga cara como cruz en cada uno de los lanzamientos.

¿Cómo se ha llegado a este número tan parejo?, si en lugar de los cien lanzamientos consideramos tan sólo los cincuenta primeros, ¿será también el número de caras aproximadamente igual al de cruces? La respuesta dependerá de lo que se entienda por “aproximadamente”.

Si la aproximación se interpretase en términos absolutos, la respuesta a nuestra pregunta sería no, pero según el sentido de “aproximadamente iguales” el número de caras y el de cruces deben diferir poco, su diferencia debe estar próxima a cero después de cualquier serie de lanzamientos.

Esta apreciación el alumnado la irá observando a medida que aumente el número de lanzamientos. Aun así, es interesante hacerle ver al alumnado que es erróneo pensar en que el comportamiento al azar de la moneda supone una especie de equilibrio, de modo que la diferencia entre el número de caras y el de cruces oscila alrededor de cero, con frecuentes empates; más bien es todo lo contrario los empates son infrecuentes y durante largos períodos uno de los resultados será mucho mas frecuente que otro.

Pero si se interpretase la aproximación entre el número de caras y de cruces en términos relativos, si que se estaríamos de acuerdo con la experiencia.

Ésta experiencia es la base del concepto frecuentista de la probabilidad.

3.1. DEFINICIÓN “FRECUENTISTA” DE LA PROBABILIDAD

Aceptando la experiencia anterior, cuando una moneda se lanza numerosas veces, la frecuencia relativa del número de caras se aproxima a un valor ideal que denominaremos probabilidad de que aparezca “cara”, llegando así a un concepto de probabilidad llamado frecuentista, ya que es una idealización de las frecuencias observadas.

La práctica nos demuestra que si el número de pruebas necesarias para calcular la frecuencia relativa se realizan todas ellas en igualdad de condiciones, y además, en cada una de ellas, el número de experimentos realizados es suficientemente grande, la frecuencia relativa tiende a la estabilidad, es decir, tiende a aproximarse a un número fijo cuando se aumenta el número de veces que se ha repetido el experimento aleatorio considerado, lo cual significa que en distintas pruebas la frecuencia relativa, varía poco, (tanto menos, cuanto mayor es el número de experimentos realizados) oscilando alrededor de un número constante.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 21 – AGOSTO DE 2009

Esta propiedad de estabilización se la conoce en el cálculo de probabilidades con el nombre de "Ley del azar" o "Ley de los grandes números".

Esta ley nos permite introducir el concepto de probabilidad de un suceso aleatorio al alumnado de la siguiente manera, llamaremos probabilidad de un suceso, al número constante alrededor del cual se estabiliza la frecuencia relativa.

3.2. DEFINICIÓN "SUBJETIVISTA" DE LA PROBABILIDAD

La probabilidad mide nuestro grado de creencia en la posibilidad de que un suceso pueda ocurrir o no pueda ocurrir. Según este punto de vista, la probabilidad es una medida dictada por cada cual, conforme a sus conocimientos del fenómeno, grado de creencia en la aparición de un acontecimiento, con independencia de que éste pueda repetirse o no.

De modo que podemos hablar de probabilidad siempre que alguien esté dispuesto a apostar por que algo va a ocurrir o no, y cada jugador, en función de su información, hará una asignación de antemano, subjetiva de la probabilidad del acontecimiento, pero lo más importante, es que una vez hecha esa asignación y aceptadas unas premisas razonables, las deducciones siguen un proceso deductivo.

De manera que este concepto, entiende la probabilidad, no como un algo absoluto, sino relativo al cúmulo de conocimientos sobre el experimento.

4. LA ASIGNACIÓN DE PROBABILIDAD

A la hora de asignar la probabilidad a los sucesos ligados a un experimento aleatorio, es crucial entender que la frecuencia con que se espera que se presente cada uno de ellos, depende de la evidencia de que se disponga acerca del experimento.

<u>EJEMPLO 1</u>:

Si lanzamos un dado por primera vez, en primer lugar observamos su simetría y su aparente homogeneidad, de manera que, ello nos llevará a pensar que las seis puntuaciones son igualmente probables. Por tanto, consideraremos que todas las caras tienen probabilidad $1/6$, es decir, que todas ellas se presentan con la misma frecuencia, una de cada seis veces.

Igualmente se puede deducir que:

- la probabilidad de obtener un múltiplo de 3 es $2/6$
- la probabilidad de obtener un resultado impar es $1/2$
- la probabilidad de obtener un número menor de 3 es $1/3$

REVISTA DIGITAL INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 21 – AGOSTO DE 2009

y así sucesivamente para cada uno de los sucesos que nos puedan interesar acerca del resultado del lanzamiento de un dado.

Muchas veces y tras múltiples lanzamientos, podemos llegar a pensar que el dado esté "cargado", puesto que puede que una cara aparezca muchas más veces que las otras.

Cuando ocurra esto, se deberían llevar a cabo mediciones mas precisas en la longitud de las aristas, localizar el centro de gravedad del cubo, etc., y tratar de construir un modelo físico más elaborado, ya que de no ser así, las probabilidades para cada una de las caras del dado serían diferentes.

Otra posibilidad, es observar directamente los resultados que se obtienen con el dado y tras realizar muchos lanzamientos, el estudio de las frecuencias con que aparecen las distintas puntuaciones, pueden llevar a asignar probabilidades diferentes para cada una de las caras, que traten de inferir en lo que ocurriría "a la larga" a partir de las observaciones realizadas.

<u>EJEMPLO 2</u>:

Se lanzan dos monedas equilibradas y se anotan los resultados de las caras superiores, evidentemente hay cuatro casos posibles.

CC CX XC XX

cuyas probabilidades deben ser iguales, puesto, que con monedas equilibradas, es igual de fácil obtener una cara que una cruz. De manera que:

- probabilidad de obtener dos caras = $1/4$
- probabilidad de obtener dos cruces = $1/4$
- probabilidad de obtener una cara y una cruz = $1/2$

<u>EJEMPLO 3</u>:

Una urna contiene dos bolas rojas y una blanca, de similares características. Si se toman simultáneamente y a ciegas dos bolas, ¿qué será más probable que sean ambas rojas o una de cada color?

La costumbre de establecer hechos seguros puede inducir a razonar de esta manera: con toda seguridad podemos afirmar que una de las dos bolas será roja, puesto que solo hay una bola blanca en la urna. De manera que sólo está indeterminado el color de la otra bola que puede ser roja o blanca, luego ambos resultados tienen la misma probabilidad.

En realidad es dos veces más probable obtener bolas de distintos colores, ya que es seguro que una de las dos bolas será roja, pero no se puede asegurar cuál de las dos bolas es. De hecho, si primero se toma una bola y luego otra, puede que la primera sea roja y la segunda blanca, o al revés, la primera blanca y la segunda roja. En cambio, sólo hay una manera de que ambas sean rojas.

INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS
REVISTA DIGITAL

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 21 – AGOSTO DE 2009

Luego,

- Probabilidad de obtener dos bolas rojas = $1/3$
- Probabilidad de obtener dos bolas distintas = $2/3$

Puede objetarse que no es el mismo experimento aleatorio tomar dos bolas simultáneamente que una primero y después la otra. Basta tomar simultáneamente una bola con cada mano para convencerse que el efecto es el mismo: la bola de la derecha puede ser roja y la de la izquierda blanca o al revés; las oportunidades a favor de que las bolas sean distintas siguen estando, dos contra una.

Ahora bien, si una urna contiene bolas rojas y blancas, iguales salvo en el color, pero desconocemos la proporción en que se encuentran dichas bolas y extraemos una bola a ciegas, ¿tendrá sentido plantearse el problema de calcular la probabilidad de que la bola elegida sea roja? o, ante esta información insuficiente debemos suspender el juicio.

Si reflexionamos, hallaremos que la cuestión que se plantea, hace referencia a la posibilidad de aplicar o no el término probabilidad a cualquier circunstancia en la que, a juicio del observador, exista incertidumbre sobre su aparición. Por ejemplo:

Tiene sentido hablar de la probabilidad de que el F. C. Barcelona gane al Madrid en el próximo partido, o tiene sentido atribuir una probabilidad al hecho de que fuese Pitágoras el descubridor de que la tierra era redonda.

Según la definición frecuentista, se puede asignar probabilidad al suceso "obtener cara al lanzar una moneda al aire", pero no al suceso "el Barcelona F.C. gana el partido", ya que este hecho difícilmente se puede repetir en las mismas condiciones y además componentes de los equipos varían de un partido a otro, con lo cual tampoco es razonable considerar como repeticiones del próximo encuentro las observaciones de partidos anteriores.

Igualmente tampoco podemos atribuir probabilidad al suceso "Pitágoras descubrió que la tierra era redonda", ya que no podemos definir con exactitud las alternativas posibles con que pudo desarrollarse el suceso "La tierra es redonda".

Si un suceso tiene sus consecuencias posibles bien definidas, puede ser repetido u observado numerosas veces, y existe una regularidad apreciable en sus frecuencias relativas, entonces es cuando únicamente podremos atribuir probabilidades. En ausencia de dichos requisitos, descartaremos usar un modelo probabilístico.

5. ACTIVIDADES CON EL ALUMNADO

1. Plantear un espacio de posibilidades para el experimento aleatorio que consiste en lazar dos dados al aire y anotar la suma de sus puntuaciones.

2. Plantear un espacio de posibilidades para el experimento aleatorio que consiste en sentar, al azar, a cuatro personas alrededor de una mesa circular.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 21 – AGOSTO DE 2009

3. Lanzamos un dado dos veces. Definir con palabras los sucesos asociados a los conjuntos:
   a) A = {(1, 5), (2, 4), (3, 3)}
   b) B = {(1, 3), (2, 6)}
   c) C = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)}

4. Elegimos uno de los números 1, 2, ….30, al azar. Hallar la probabilidad de que sea múltiplo de 3.

5. Plantear un modelo probabilística del experimento aleatorio que consiste en elegir dos cartas, al azar, de una baraja española.

   Hallar la probabilidad de que alguna de las cartas elegidas sea un as.

6. Se eligen cuatro cartas al azar de una baraja española. ¿Cuál es la probabilidad de que haya un oro y un caballo?

7. De una bolsa con 7 bolas rojas, 5 verdes, 3 amarillas, 11 negras y 3 azules, de igual tamaño, se extrae una al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que no sea negra?

8. Si disponemos de una ruleta con números del 1 al 8 y se hace girar la flecha, observando en qué número se detiene. Calcular las probabilidades de los siguientes sucesos:
   a) Obtener número par.
   b) Obtener 5 ó más.
   c) Que no salga el 7.

9. Escribimos cada una de las letras de la palabra PREMIO en un papel diferente y las ponemos dentro de una bolsa. Extraemos una letra al azar:
   a) Describe el suceso “obtener vocal” y calcular su probabilidad.
   b) Si la palabra elegida fuese SUERTE, ¿cómo responderías a la pregunta anterior?

10. Lanzamos dos dados. Calcular la probabilidad de que el producto de sus puntuaciones sea 6.

6. BIBLIOGRAFÍA:

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 21 – AGOSTO DE 2009

- GLAYMANN, M., VARGA, T. Probabilidades en la escuela. Editorial Teide. Colección Matemáticas. Barcelona 1975.
- DÍAZ GODINO J., BATNERO Mª c., CAÑIZARES Mª J.. Azar y probabilidad. Matemáticas cultura y aprendizaje. Editorial Síntesis. 1991.
- FELLER, W. Introducción a la Teoría de probabilidades y sus aplicaciones. 3ª Edición. Vol 1. New York: Wiley. 1968.
- HERNÁNDEZ, V., VÉLEZ, R. Dados, Monedas y urnas. Universidad Nacional de E. D. Torán, S. A. Madrid. 1996
- GIRON, F.J. Determinismo, Caos, Azar e Incertidumbre. En Horizontes Culturales: Las fronteras de la Ciencia. 1999. Madrid: Espasa (en prensa).

Autoría

- Nombre y Apellidos: Catalina Ponce Huertas
- Centro, localidad, provincia: I.E.S. Antonio Gala. Palma del Río. Córdoba.
- E-mail: catiph12@hotmail.com