REVISTA DIGITAL INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 21 – AGOSTO DE 2009

“ÁREA DE FIGURAS PLANAS”

AUTORÍA **CATALINA PONCE HUERTAS**
TEMÁTICA **MATEMÁTICAS**
ETAPA **ESO**

Resumen

La utilidad de la medida está en la sociedad suficientemente reconocida, de ahí que se justifique su importancia, tanto desde las necesidades de la vida adulta, debido a la cantidad de mediciones que se realizan cotidianamente, como desde las necesidades del mundo del trabajo, así como desde las necesidades matemáticas cara a la enseñanza.

Palabras clave

Medida.

Área.

Figuras planas

1. INTRODUCCIÓN

La medida de una magnitud es un proceso que se inicia con la constitución de la magnitud y se completa con la medida y la estimación de la misma. El proceso comienza con la percepción de la cualidad que se va a medir, posteriormente se comparan objetos que comparten este atributo común medible.

El siguiente paso y de mayor utilidad desde el punto de vista práctico, es el de asignar un número a una cantidad. Esto se realiza mediante el siguiente proceso:

- Se escoge una cantidad fija que llamamos unidad de medida.
- Se reitera tantas veces como sea preciso sobre el objeto a medir.
- Se cuenta el número de veces que se ha iterado.
- Se le asigna al objeto ese número. Dicho número será su medida respecto a la unidad elegida.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 21 – AGOSTO DE 2009

2. ASPECTOS HISTÓRICOS:

2.1. LA IMPORTANCIA DE LA MEDICIÓN Y ETAPAS DE LA EVOLUCIÓN

Si se estudian los contenidos de la matemática actual, se puede observar que constituyen un edificio de conceptos que están expresados por definiciones y teoremas. Al alumnado se les presenta estos conceptos, teoremas y métodos demostrativos, como si fueran así desde un principio, como si no hubiera habido una larga historia que modelara todas las adquisiciones de conocimiento en este campo. Sin embargo, no podemos olvidar que los verdaderos comienzos de las matemáticas tienen un claro carácter práctico.

Los números y las formas geométricas no se pueden considerar conceptos abstractos hasta los estudios del mundo helénico.

Para medir la longitud de un objeto se cuenta cuántas veces es necesario aplicar una unidad de longitud prefijada de antemano a ese objeto. La "aplicación" de esa unidad al objeto es claramente una operación geométrica, mientras que "contar cuántas veces…", es un cálculo aritmético.

A partir de estas actividades de medición se potenció en el mundo antiguo el desarrollo de las matemáticas. Todas la teorías de los distintos números tienen su comienzo en necesidades de medición, salvo quizás los números complejos, o en el descubrimiento de ciertas propiedades geométricas.

Es evidente que el número natural no es suficiente para expresar el resultado de una medida en una magnitud, no siempre la "cantidad" de magnitud a medir contiene un número entero de veces a la unidad elegida. De ahí surge la necesidad de fraccionar la unidad con el fin de expresar los resultados con más fiabilidad y exactitud.

Ahora bien, no siempre se puede expresar el resultado de una medición mediante una fracción. Por sucesivos fraccionamientos de la unidad podemos acercarnos a una medición aproximada, pero no exacta. Al principio este problema no preocupaba, puesto que las necesidades prácticas no contemplaban una precisión de infinitésimos; los pueblos anteriores a los griegos se contentaban con efectuar mediciones suficientemente aproximadas al problema físico a resolver.

Queda claro que el proceso de medida es tan antiguo como el propio quehacer humano. No se puede ajustar la cuerda a un arco, ni el hacha a su mango, sin medir. En la antigüedad los objetos a ajustar se comparaban directamente entre sí; pero tan pronto como las operaciones industriales se hicieron más complicadas, resultó más conveniente comparar cada parte con un patrón.

En un principio, los patrones para comparar eran objetos naturales e individuales, como el dedo, la palma de la mano, el antebrazo, el codo, etc., eran unidades personales de longitud. Posteriormente se hizo necesario fijar patrones de pesas y medidas.

El establecimiento de normas para pesar y medir se apoya, como el lenguaje y la escritura en una convención. Las pesas y medidas, al igual que las palabras y las letras, deben estar autorizadas por el uso social.

INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS
REVISTA DIGITAL

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 21 – AGOSTO DE 2009

Dos factores fueron determinantes para la unificación de los sistemas de unidades de las diferentes regiones: el comercio y el poder. La intensificación de las relaciones comerciales entre las diferentes regiones y naciones ha impulsado fuertemente esta unificación.

Por otra parte, la fijación de unidades siempre ha sido un atributo de poder, quien desempeñaba el poder, fijaba las unidades y les confería obligatoriedad.

En resumen, respecto a las distintas unidades de medida usadas a lo largo de la historia, señalamos algunos momentos claves:

- Las unidades de medida son partes del cuerpo humano.
- Historia de las sociedades agrarias; período en el que se toman las unidades de las condiciones, objetos y resultados del trabajo del hombre.
- Descubrimiento del cuadrado como unidad de superficie.
- Cuadratura de un polígono. El problema de las superficies no cuadrables queda sin resolver.
- Concepto de integral definida. Dada una región del plano, su área se podría calcular por medio de regiones poligonales inscritas o circunscritas a la misma, tales que al aumentar los lados, el área de estos polígonos tienda a aproximarse al área pedida.

  La integral definida es una generalización práctica y sutil de este proceso, permite medir una superficie bajo una curva siendo posible establecer un patrón universal de medida.
- Revolución francesa: se establece el actual sistema métrico decimal.

2.2. ASPECTOS DE LA MEDICIÓN RELACIONADOS CON EL ÁREA

En la *antigua sociedad agrícola*, la producción de alimentos provocaba el problema de almacenamiento de sobrantes. Los granos debían conservarse hasta la siguiente cosecha. Esta conservación es fácil pero conlleva la necesidad de habitáculos para almacenarlos. El hombre del Neolítico aporta la creación del vacío mediante la arcilla.

Las matemáticas babilónicas y egipcias estaban relacionadas con problemas reales. De Babilonia han quedado tablillas que contienen grupos de problemas, algunos de ellos, relacionados con el cálculo de áreas y volúmenes como: el número de ladrillos necesarios para los muros de una cisterna cilíndrica, la estimación de cosechas en campos de diferentes superficies, la cantidad de trabajadores necesarios para realizar un movimiento de tierras, excavar un canal de sección trapezoidal y de dimensiones dadas.

Las unidades de área que utilizaban eran:

1 gar cuadrado = 1 sar (aproximadamente 36 m^2)

100 sar = 1 iku

1800 iku = 1 bur

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 21 – AGOSTO DE 2009

El gar y el sar se tomaba como unidad en medidas de áreas de casas, mientras que el iku y el bur se utilizaban para medir los campos.

En la *Civilización Egipcia,* el descubrimiento del papiro nos ha permitido conocer cómo se desarrollaron las matemáticas. Los egipcios disponían de recetas para el cálculo de áreas de rectángulos, triángulos, trapezoides, y el cálculo del área del círculo mediante la fórmula

$$A = \left(\frac{8d}{9}\right)^2$$ donde d es el diámetro del círculo

Con las pirámides egipcias, representaban otra aplicación de la geometría, poniendo especial cuidado en construir sus bases de forma correcta y las dimensiones relativas de la base y la altura.

En la *Civilización griega,* el importante avance de las matemáticas llevó a reflexionar sobre problemas matemáticas que no se producían por una necesidad social, como la axiomatización de la geometría de Euclides, aplicando el método de exhausción, equivalente al método integral, en cuatro casos:

- Proporocionalidad entre los círculos y los cuadrados construidos sobre diámetros respectivos.
- Proporcionalidad entre esferas y cubos construidos sobre esos diámetros.
- Equivalencia entre la pirámide y la tercera parte del prisma de igual pase.
- Igualmente para el cilindro y el cono.

Arquímedes proporcionó demostraciones del área de la esfera, del segmento esférico, área lateral del cono, del cilindro, etc.

Otro problema legado por los griegos es el referente a la “cuadratura del círculo”, aunque no lo consiguieron resolver. El mismo fracaso tuvieron todos los que lo intentaron durante muchos siglos, hasta que a finales del siglo pasado se resolvió el problema negativamente, demostrando que es imposible cuadrar el círculo con sólo regla y compás.

Evolución hasta nuestros días: La idea de descomponer los cuerpos en capas paralelas ha sido el hilo conductor de procedimientos desarrollados en los siglos posteriores para perfeccionar el cálculo de volúmenes en otros cuerpos complejos.

Fermat desarrolló un procedimiento para determinar el área encerrada bajo la curva “$y = x^m$” con m racional.

Finalmente matemáticos como Barrow, Riemann, Lebesgue, etc., hicieron grandes aportaciones a la medida de áreas y volúmenes, desarrollando así la teoría de la integración.l

3. FENOMENOLOGÍA

Hay una cualidad en los objetos llamada, generalmente, superficie o área. Algunos autores establecen diferencias entre estos términos, entendiendo “superficie” para designar dicha cualidad y “área” para su medida. Nosotros no emplearemos esa distinción, es decir, consideraremos el área como una cualidad que puede medirse a través de sus unidades.

REVISTA DIGITAL INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 21 – AGOSTO DE 2009

Existen multitud de situaciones y objetos donde aparece la cualidad área, por ejemplo:

- Una lámina o rollo, papel o cartulina.
- Una plancha de metal, corcho o chapa de madera.
- Una pieza de tela
- Una piel de cabra, vaca, etc.
- Un campo de fútbol o una piscina
- Un terreno de granja, finca o cortijo, o un local
- Un territorio de un estado, provincia, etc.
- Una pared o una valla para ser pintada.
- Una calle para ser asfaltada o pavimentada
- Un campo que tiene que arado, sembrado, etc.
- Cuerpos para vestir, muebles para tapizar.
- Una sección de un sólido.
- Etiquetado de botes y latas de conserva, botellas, etc.
- Elaboración de planos y mapas

Entre otros.

La fenomenología del área, está estrechamente relacionada con las necesidades del hombre, (necesidad por medir algo).

Freudhenthal indica tres aproximaciones del concepto de área:

1. Repartir equitativamente, donde se incluyen situaciones en las que un objeto hay que repartirlo.
2. Comparar y reproducir, donde se incluyen situaciones en las que hay que comparar dos superficies y dónde hay que obtener una reproducción de una superficie de una forma diferente a la que tiene.
3. Midiendo, donde se incluyen situaciones donde la superficie aparece ligada a un proceso de medida, ya sea para comparar, repartir o valorar.

4. MODELOS Y REPRESENTACIONES

A grandes rasgos, existen dos vías de aproximación al concepto de superficie:

- Cuadratura
- Cuadriculación

Tales aproximaciones, según Freudhenthal, pueden resolverse de diferentes modos:

REVISTA DIGITAL INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 21 – AGOSTO DE 2009

1. Repartir equitativamente

- Aprovechando regularidades, (una tarta circular suele partirse mediante el trazado de diámetros imaginarios).
- Por estimación, (para partir una cuartilla en tres partes iguales, se superponen las tres posibles partes y se van equilibrando hasta conseguirlo).
- Por medida. Consiste en medir la cantidad a repartir, dividir el resultado de esa medida entre el número de partes que se desea obtener y medir cada una de las partes.

2. Comparar y reproducir

- Por inclusión. Si una superficie está contenida en otra, su comparación es inmediata (la superficie de la portada de un libro que está sobre una mesa es menor que la de la mesa).
- Por transformaciones de romper y rehacer, que consisten en descomponer una superficie en diversas partes y reorganizarlas posteriormente obteniendo formas diferentes que tienen la misma área. (Figuras que pueden realizarse con el tangram).
- Por estimación. (cuando vamos a comprar tela para hacer una falda).
- Por medida, (para comparar dos superficies lo más habitual es recurrir a medir).
- Por medio de funciones que conserven el área.

3. Midiendo

- Por exhaución con unidades: Consiste en rellenar el interior de la superficie a medir con unidades de superficie, colocadas unas junto a otras y no superpuestas, y en aquellas partes de la superficie donde no quepan se recurre a rellenar con unidades más pequeñas. Este proceso se continúa hasta que se recubra totalmente la superficie a medir o se considera que la porción no recubierta es despreciable para la actividad que estamos realizando. Esta técnica no es muy práctica.
- Por cuadriculación: consiste en acotar entre un valor superior e inferior, obteniendo así una medida aproximada de cualquier superficie. Para ello se superpone una rejilla cuadrada (de 1 cm de lado, por ejemplo), a la superficie a medir y contar el número de cuadrados que son totalmente interiores a la superficie, y por otra parte el número de cuadrados que intersecan a la superficie, tendremos así una medida aproximada por defecto y otra por exceso.
- Por transformaciones de romper y rehacer, por ejemplo, para calcular el área de un triángulo equilátero se puede descomponer por una de sus alturas en dos triángulos rectángulos y unir estos por su hipotenusa, obteniendo así un rectángulo.
- Por teselación. Para recubrir el plano con un polígono, la suma de los ángulos que confluyen en un vértice ha de ser 360º.

  Sólo existen cinco tipos de polígonos regulares para obtener teselaciones: triángulo, cuadrado, hexágono, octógono y dodecágono. Los polígonos irregulares también pueden servir para recubrir un plano.

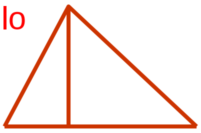
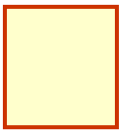
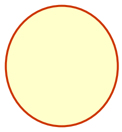
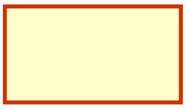
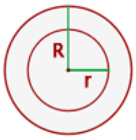
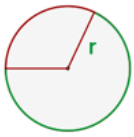
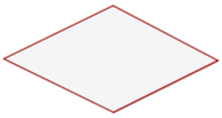
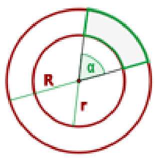
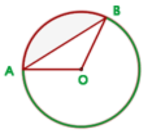
REVISTA DIGITAL INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 21 – AGOSTO DE 2009

5. EXPRESIÓN ALGEBRÁICA. FÓRMULAS.

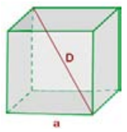
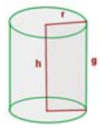
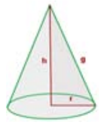
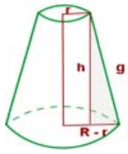
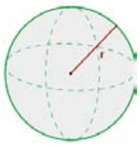
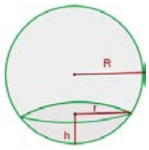
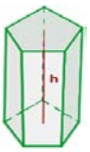
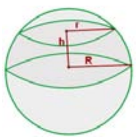
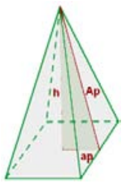
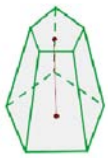
Otra forma de representar algebraicamente el cálculo de áreas y volúmenes lo constituyen las fórmulas.

A continuación damos un cuadro donde se recogen las fórmulas más usuales para el cálculo de áreas de figuras planas tomando como unidad de superficie el cuadrado.

FIGURA	ÁREA	FIGURA	ÁREA
Triángulo 	$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$	Polígono Regular 	$A = \frac{\text{Perímetro} \cdot \text{apotema}}{2}$
Cuadrado 	$A = (\text{lado})^2$	Círculo 	$A = \pi \cdot r^2$
Rectángulo 	$A = \text{base} \cdot \text{altura}$	Corona circular 	$A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$
Romboide 	$A = \text{base} \cdot \text{altura}$	Sector circular 	$A = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{360^\circ}$
Rombo 	$A = \frac{\text{Diagonal mayor} \cdot \text{diagonal menor}}{2}$	Trapecio circular 	$A = \frac{\pi \cdot (R^2 - r^2)}{360^\circ}$
Trapecio 	$A = \frac{(\text{Base mayor} + \text{base menor}) \cdot \text{altura}}{2}$	Segmento circular 	A = Área del sector circular – Área del triángulo

REVISTA DIGITAL INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 21 – AGOSTO DE 2009

Cubo 	$A = 6 \cdot a^2$	Cilindro 	$A = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (h+r)$
Tetraedro regular 	$A = a^2 \cdot \sqrt{3}$	Cono 	$A = \pi \cdot r \cdot (g+r)$
Octaedro regular 	$A = a^2 \cdot 2\sqrt{3}$	Tronco de cono 	$A = \pi \cdot [g \cdot (R+r) + R^2 + r]$
Icosaedro regular 	$A = a^2 \cdot 5\sqrt{3}$	Esfera 	$A = 4\pi \cdot r^2$
Dodecaedro 	$A = 30 \cdot a \cdot \text{apotema}$	Casquete esférico 	$A = 2\pi \cdot R \cdot h$
Prisma recto 	$A = P_B \cdot h + 2 A_B$ donde P_B el perímetro de la base A_B el área de la base	Zona esférica 	$A = 2\pi \cdot R \cdot h$
Pirámide recta 	$A = \frac{P_B \cdot \text{apotema}}{2} + A_B$ donde P_B el perímetro de la base A_B el área de la base	Tronco de pirámide recta 	$A = \frac{P + P'}{2} \cdot Ap + A + A'$ donde P= perímetro de la base mayor P'=perímetro de la base menor Ap= apotema A= área de la base mayor A'= área de la base menor

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 21 – AGOSTO DE 2009

6. ERRORES Y DIFICULTADES

El conocimiento de las dificultades y errores más frecuentes constituye una faceta preventiva de gran ayuda en la enseñanza. Vamos a distinguir entre errores relativos a la medida en general y errores específicos referidos al cálculo de áreas.

6.1. ERRORES ATRIBUIBLES A LA METODOLOGÍA TRADICIONAL RELATIVOS A LA MEDIDA

- *Uso erróneo de los sentidos*: En la enseñanza tradicional, el uso de los sentidos es considerado un lujo, una pérdida de tiempo; sólo en algunos casos se permite el uso de la vista.
- *Uso de instrumentos inadecuados y mal manejo de los instrumentos*: una mala apreciación sensorial hace elegir a veces un instrumento inadecuado. En otras ocasiones, el reducir los instrumentos de medida a los convencionales hace que la elección sea poco afortunada.
- *Errores cometidos en la medición debidos a los malos procedimientos empleados o la elección de una unidad inadecuada*:
- *Confusión entre magnitudes.*
- *Resolución de problemas que contienen datos erróneos o no reales*: Con frecuencia se propone al alumnado enunciados como que una familia bebe al día 100 litros de agua, 5000 obreros cavan una zanja de 4 m^3 de capacidad, esto puede dificultar la autocorrección, ya que el alumnado se habitúa a resolver problemas cuyo resultado es irreal.
- *Abuso de la exactitud en las medidas. Encuadramientos*. Se confunde muy a menudo la medida entera con la medida exacta.
- *Carencia de estrategia para efectuar medidas de objetos comunes:* lo habitual es hallar superficie de terrenos de forma regular, de manera que cuando al alumnado se le pide calcular la tela que se necesita para confeccionar un vestido, es raro que éste disponga de los medios para resolver el problema.

6.2. ERRORES ESPECÍFICOS EN EL CÁLCULO DE ÁREAS

- Confusión perímetro-área, este error es muy frecuente. Además el hecho de que dos figuras tengan la misma área, induce a algunos estudiantes a creer que tienen también el mismo perímetro.
- Pensar que las medidas indirectas son las medidas reales y no valorar la medida conceptual del área.
- No reducir a la misma unidad en los cálculos.
- Tratamiento lineal de las medidas de superficie, lo cual induce a creer que al duplicar el lado de una figura se duplicará también su área.
- Cambiar la unidad de referencia al medir distintas superficies.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 21 – AGOSTO DE 2009

6.3. DIFICULTADES

Entre las dificultades para el alumnado a la hora del cálculo de superficies, podemos destacar:

- Que las figuras tengan una forma irregular.
- Que las figuras no aparezcan pavimentadas.
- La proporcionalidad inversa entre el tamaño de la unidad de medida y la medida.

Si la unidad de medida pasa a ser el centímetro cuadrado a una pequeña baldosa de 0,5 cm x 0,5 cm, a pesar de ver las dos, algunos estudiantes doblan las respuestas que obtuvieron al usar el centímetro cuadrado.

- El contar unidades no enteras, por ejemplo, al medir una figura en dividida en cuadrados y aparecen partes del cuadrado que no son mitades.

7. BIBLIOGRAFÍA

- CHAMORRO, C. El problema de la medida. Editorial Síntesis. Madrid. 1988.
- GARCÍA, J. Geometría y experiencias. Editorial Alambra. Madrid. 1988.
- ORTIZ Mª. El área y su medida. Universidad de Valladolid, Facultad de Ciencias. Sección: Matemáticas.
- MORRIS, K. El pensamiento matemático desde la antigüedad a nuestros días. Alianza Universidad Madrid. 1992.
- FARGAS, M. Medida y magnitudes. Editorial Almadraba. Barcelona. 1996.

Autoría

- Nombre y Apellidos: CATALINA PONCE HUERTAS
- Centro, localidad, provincia: I.E.S. Antonio Gala. Palma del Río. Córdoba
- E-mail: catiph12@hotmail.com