REVISTA DIGITAL
INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 21 – AGOSTO DE 2009

"DISTINTOS ENFOQUES PARA EL TRABAJO DE LOS LUGARES GEOMÉTRICOS"

AUTORÍA **PATRICIA PÉREZ ORTIZ**
TEMÁTICA **INVESTIGACIÓN EDUCATIVA EN MATEMÁTICAS**
ETAPA **BACHILLERATO**

Resumen

La Geometría en distintas etapas históricas ha sido contemplada con "diferentes" ojos, tanto en su vertiente científica como didáctica. El presente artículo resuelve desde puntos de vista diferentes un mismo problema o ejercicio geométrico. Se pretende que sirva de modelo para problemas similares en los estudios de Bachillerato.

Palabras clave

Lugar geométrico, sistema de referencia en el plano, coordenadas cartesianas y polares.

1. INTRODUCCIÓN

El concepto de lugar geométrico en mayor o menor medida está presente en toda la geometría. Así cuando un estudiante busca en el plano qué puntos son aquellos que equidistan de dos rectas dadas está intentando averiguar un lugar geométrico. Éste es, pues, el conjunto de puntos del espacio de trabajo que cumplen una determinada propiedad geométrica. De alguna manera un lugar geométrico es el correlato visual de una propiedad geométrica. Los puntos del lugar geométrico son los únicos que cumplen una propiedad geométrica, la cual los caracteriza. Que el alumno sea capaz de asociar una propiedad geométrica sobre puntos de un espacio con el lugar geométrico correspondiente es uno de los objetivos de la enseñanza de la geometría

La circunferencia cuando se la define como los puntos del plano que se encuentran a una distancia fija de un punto dado constituye uno de los ejemplos más simples e importantes de lugar geométrico. Las bisectrices de dos rectas secantes son el lugar geométrico de los puntos que equidistan de éstas últimas. Los puntos de una elipse son aquellos cuya suma de distancias a dos puntos fijos es constante. Todos estos y otros muchos son ejemplos de lugares geométricos en el plano.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 21 – AGOSTO DE 2009

Una de las aplicaciones más importantes de los lugares geométricos es la generación y descubrimiento de nuevas curvas. Éstas son, entonces, contempladas no sólo desde su aspecto bello y estético, sino como depositarias de propiedades geométricas y por ello como herramientas que permiten resolver problemas. El que en este artículo se plantea o se propone no lo es por su importancia teórica, por la generación de nuevas curvas, sino precisamente por su sencillez y fácil comprensión, y porque en él se pueden poner en práctica diversas técnicas de tratamiento de este tipo de problemas. En el artículo se da más importancia a los procesos y técnicas involucrados en su tratamiento que al problema en sí mismo.

2. ENUNCIADO DEL PROBLEMA

Dada una circunferencia y un punto O de la misma, ¿cuál es el lugar geométrico de los puntos medios (o centros de gravedad) de las cuerdas uno de cuyos extremos es O?

El problema habla específicamente de tres tipos de objetos geométricos elementales:

- Circunferencia
- Cuerdas o segmentos que unen dos puntos de la circunferencia.
- Puntos medios de las cuerdas.

En su tratamiento se adoptarán los siguientes puntos de vista:

- Experimental, mediante la utilización de un programa de geometría interactiva.
- Sintético o clásico, al modo de los Elementos de Euclides.
- Analítico mediante el empleo de coordenadas cartesianas.
- Analítico mediante el empleo de coordenadas polares.

Como es lógico los objetos de los que habla el problema deberán ser modulados de acuerdo con el punto de vista adoptado.

3. ENFOQUE EXPERIMENTAL

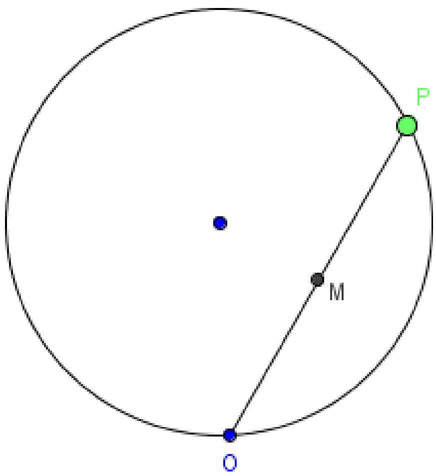
Cuando cualquier persona intenta resolver un problema no rutinario adopta naturalmente una actitud investigativa, para familiarizarse con los elementos que intervienen, descubrir cómo se comportan y en la medida de lo posible esbozar suposiciones o hipótesis. Los modernos programas informáticos de Geometría Interactiva permiten de manera cómoda cumplimentar dicha fase experimental en el caso de que los problemas tengan un cariz geométrico. Aquí se utilizará el programa denominado Geogebra por ser libre, gratuito y multiplataforma ya que al estar basado en Java funciona de la misma forma en cualquier sistema operativo que tenga instalada la máquina virtual de Java.

REVISTA DIGITAL INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 21 – AGOSTO DE 2009

El programa dispone de las herramientas que permiten construir circunferencias, segmentos y puntos medios mediante simples pulsaciones del ratón. El proceso constructivo es simple:

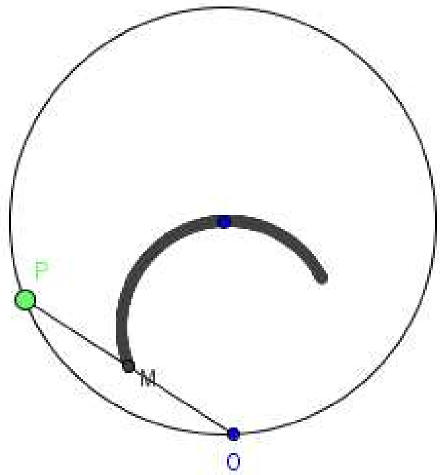
1. Se define una circunferencia a partir de punto que hace de centro y de otro punto sobre la misma. Este último punto, O, puede ser utilizado como extremo fijo de las cuerdas.
2. Se toma un punto, P, sobre la circunferencia anterior.
3. Se traza el segmento de extremos O y P.
4. Se define M punto medio del segmento anterior



Lo esencial de esta construcción es que no es estática. El punto medio lo es del segmento OP uno de cuyos extremos es el punto P que mediante arrastre con el ratón puede moverse libremente sobre la circunferencia, lo que producirá el movimiento consecuente del punto medio M. Arrastrando el punto P el punto M ocupará distintas posiciones, entre las cuales pueden observarse que el punto M pasa por el centro de la circunferencia cuando la cuerda coincide con el diámetro y también pasa por el punto O en el caso extremo o singular de que los extremos de la cuerda coincidan en O. Es posible que pueda sospecharse o intuirse la forma que adoptará el lugar geométrico buscado.

En todo caso Geogebra dispone de una opción llamada “activa traza” que se visualiza en el menú contextual que surge al pulsar con el botón derecho del ratón sobre los puntos, y que una vez activada en el punto medio hace que éste al moverse deje huella o rastro, lo que permite más fácilmente intuir el lugar geométrico buscado.

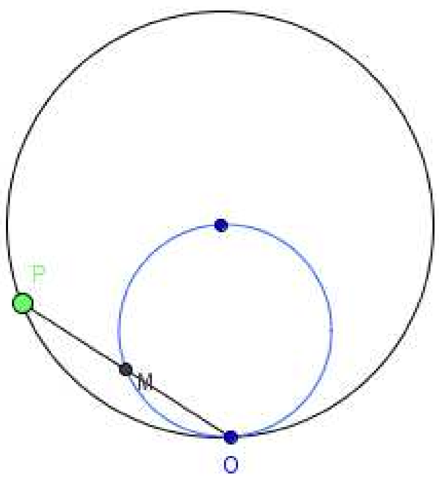
ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 21 – AGOSTO DE 2009



.

Y por último si se quiere más precisión la herramienta lugar geométrico de la que también dispone Geogebra construye nítidamente el lugar geométrico que busca el problema planteado. La construcción del lugar geométrico requiere por este orden:

1. el punto M, que lo genera
2. el punto P, que se mueve sobre la circunferencia.



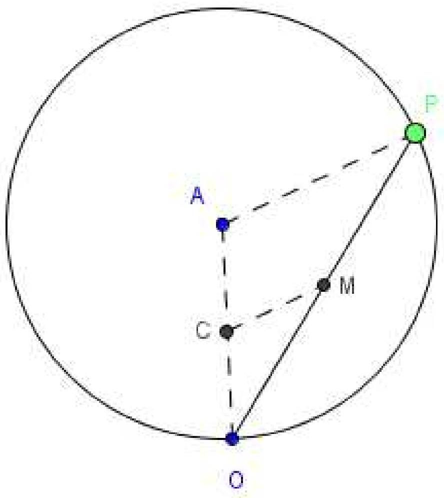
El enfoque experimental del problema, al menos en su parte esencial, parece haber llegado a su fin. El lugar geométrico buscado es una nueva circunferencia de diámetro el segmento que une O con el centro de la circunferencia primitiva. Si se desea podría trazarse este diámetro, buscar su punto medio y trazar la circunferencia con éste por centro y que pasa por O, comprobando que el lugar geométrico obtenido y esta última circunferencia coinciden.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 21 – AGOSTO DE 2009

Los resultados obtenidos en la fase experimental sin duda servirán de guía en los enfoques más técnicos que se exponen a continuación.

4. ENFOQUE SINTÉTICO

En este enfoque más clásico, "euclídeo", el papel central lo desempeñan las figuras geométricas, sus propiedades, con la intervención de teoremas como el de Pitágoras, Tales… Un buen dibujo en el que estén presentes los objetos geométricos de los que habla el problema y el conveniente trazado de algunos otros auxiliares, que anticipen los pasos siguientes, constituyen sin duda un aspecto fundamental de la resolución del problema. Y en el descubrimiento de estos objetos auxiliares es de gran ayuda el trabajo ya realizado con los programas de geometría interactiva. En el dibujo que sigue estos objetos auxiliares se muestran en trazo discontinuo y vienen sugeridos por la hipótesis de que el lugar geométrico buscado es la circunferencia de centro el punto medio del segmento que une O con el centro de la circunferencia inicial y radio la mitad del de ésta



Desde el punto de vista sintético la resolución del problema propuesto es interpretada como la "demostración" de la identidad entre el lugar geométrico buscado y la circunferencia de centro C y diámetro OA. Como muchas demostraciones conjuntistas consta de dos partes:

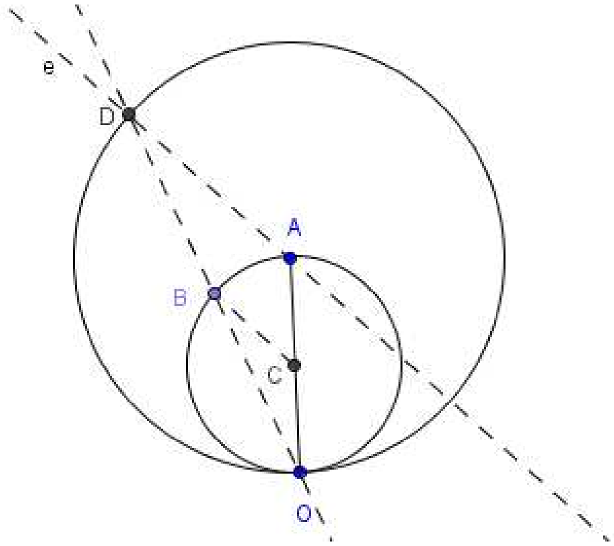
1. Que todo punto medio de las cuerdas está en la circunferencia mencionada.
2. Que todo punto de ésta es también punto medio de una cuerda de la circunferencia inicial uno de cuyos extremos es O.

Ambas demostraciones no son difíciles si se acude a los criterios de semejanza de triángulos, al teorema de Tales.

REVISTA DIGITAL INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 21 – AGOSTO DE 2009

En lo que atañe a la primera parte de la demostración los segmentos OM y OC son respectivamente la mitad de OP y OA, y la razón de semejanza entre los triángulos OCM y OAP es $\frac{1}{2}$, por lo que CM es la mitad de AP, y en consecuencia el punto M dista de C la mitad del radio de la circunferencia inicial y se encuentra sobre la circunferencia de diámetro OA.



Sea B un punto de la circunferencia de diámetro OA. Se trazan la recta que pasa por O y B, el segmento CB, y la recta paralela a éste último por A. Si designamos por D el punto en que confluyen ambas rectas, por el teorema de Tales los triángulos OBC y OAD son semejantes y su razón de semejanza es $\frac{1}{2}$, y en consecuencia AD es un radio de la circunferencia de centro A y D es un punto de la misma y B es el punto medio del segmento OD. Todo punto, pues, de la circunferencia de diámetro OA es punto medio de una cuerda de la circunferencia de centro A.

Tal vez se crea que la demostración de que el lugar geométrico buscado coincide con la circunferencia de diámetro OA ha concluido, mas en este tipo de demostraciones, que están muy focalizadas en el dibujo, es muy frecuente pasar por alto algunos casos singulares como aquellos en que la cuerda coincide con el diámetro o en que no haya cuerda por coincidir los puntos extremos. Aun no siendo casos especialmente difíciles, en rigor, tal hecho suele complicar el enfoque sintético.

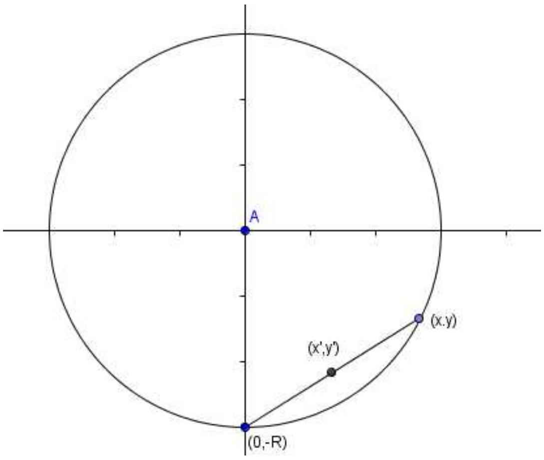
5. ENFOQUE ANALÍTICO, MEDIANTE COORDENADAS CARTESIANAS

En la geometría analítica se usan números, ecuaciones y álgebra en general para solucionar problemas geométricos. Ello requiere que en el espacio de trabajo se introduzcan sistemas de referencia. En el plano los sistemas llamados cartesianos o rectangulares constan de un punto u origen (en el que se supone situado el observador) y de dos direcciones perpendiculares (ejes) dotadas de unidades y en

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 21 – AGOSTO DE 2009

consecuencia graduadas. Cada punto del plano vendrá definido mediante un par de números llamados coordenadas cartesianas, los cuales se obtienen proyectando el punto sobre los ejes. En la geometría analítica los puntos son manejados mediante sus coordenadas que normalmente se designan mediante las letras x e y. Las figuras geométricas planas se manejan y se reconocen mediante sus ecuaciones en las incógnitas anteriormente citadas.

El enfoque analítico exige, pues, la elección de un sistema de referencia. Si éste se elige convenientemente es posible que los cálculos, que es una de las pesadillas de este tipo de geometría, se simplifiquen en buena medida. En el problema que nos ocupa esta elección viene sugerida por la circunferencia de partida, cuya expresión analítica o algebraica es más sencilla si el origen del sistema de referencia se sitúa en el centro de la misma. La ecuación de una circunferencia cuyo centro está situado en el punto C(a,b) y cuyo radio es R es $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.



Si el origen del sistema de referencia se sitúa en el centro A de la circunferencia ésta adopta la ecuación $x^2+y^2=R^2$. Los puntos medios de las cuerdas designados por (x',y') cumplen las ecuaciones

$$\begin{cases} x'=\dfrac{1}{2}x \\ y'=\dfrac{1}{2}(y-R) \end{cases}.$$

Despejando x e y y sustituyéndolas en la ecuación de la circunferencia se obtiene la condición que han de cumplir las coordenadas de dichos puntos medios. En suma $(2x')^2+(2y'+R)^2=R^2$ o $4(x')^2+4\left(y'+\dfrac{R}{2}\right)^2=R^2$, expresión que puede adoptar la forma $(x')^2+\left(y'+\dfrac{R}{2}\right)^2=\left(\dfrac{R}{2}\right)^2$. Y ésta es la ecuación de una circunferencia de centro $\left(0,-\dfrac{R}{2}\right)$ y radio $\dfrac{R}{2}$.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 21 – AGOSTO DE 2009

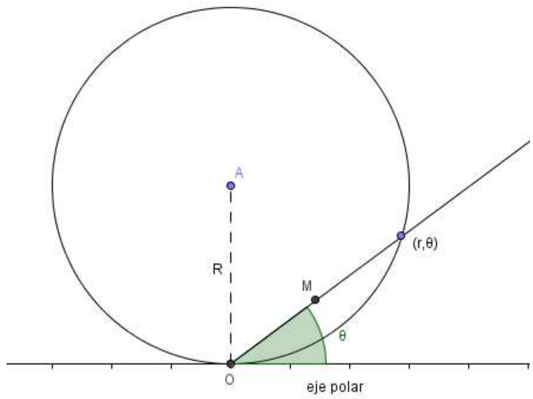
El lugar geométrico buscado es, pues, la circunferencia de diámetro el radio de la circunferencia primitiva y cuyo centro se sitúa en el punto medio del segmento OA.

No cabe duda que pagando un tributo al dios del cálculo se ha obtenido en el caso que nos ocupa una mayor limpieza en los razonamientos.

6. ENFOQUE ANALÍTICO, MEDIANTE COORDENADAS POLARES

Éste último enfoque del problema es similar al anterior. La única diferencia estriba en que se adopta un sistema de referencia peculiar llamado polar. Este consta de un punto origen O, llamado polo, y un semieje con origen en O graduado, llamado eje polar. Cada punto del plano se encuentra a una cierta distancia r del polo y bajo un ángulo θ a partir del eje polar. (r,θ) se denominan coordenadas polares del punto en cuestión.

Este sistema de referencia es extremadamente útil cuando en el problema puede encontrarse un punto fijo, que actuará como polo del sistema polar, desde el que los objetos más relevantes puedan ser contemplados de forma simple. Ciertamente los puntos de las cuerdas al estar situados sobre rectas que pasan por O adoptarán expresiones sencillas en coordenadas polares, a la par que la circunferencia se tornará más compleja.



En el sistema de referencia polar que muestra la figura la circunferencia de radio R tiene por ecuación $r^2 - 2Rrsen\theta = 0$, o $r = 2Rsen\theta, \quad 0 \le \theta \le \pi$. Los puntos medios cumplen, pues, la ecuación $r = Rsen\theta$. Su lugar geométrico es, pues, una circunferencia que pasa por O y cuyo centro está situado en el punto medio del segmento OA.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 21 – AGOSTO DE 2009

7. CONCLUSIÓN

El objetivo del presente artículo no era insistir en la importancia del concepto de lugar geométrico, que merece una mayor dedicación y ejemplos más pertinentes, ni siquiera lo era resolver un problema que por otra parte no es muy significativo y relevante, sino utilizando el mismo como pretexto insistir en los distintos enfoques que pueden adoptarse en Geometría. Cada uno de ellos, como es natural, tiene sus ventajas e inconvenientes.

El enfoque experimental debe ser siempre el primero, en el que el alumno construya un mundo virtual en el que pueda moverse, realizar cambios, formular hipótesis sin costes añadidos. La Geometría analítica al no apoyarse tanto en el dibujo produce con frecuencia, al menos en los alumnos que se mueven con comodidad en las tierras del álgebra, sentimientos más seguros, si bien tiene el inconveniente de requerir una cantidad ingente de cálculo, lo que dificulta su comprensión. Muchos alumnos tienen dotes más acordes con el espíritu de la geometría sintética, les gusta razonar sobre un buen dibujo y emplear las propiedades geométricas de los triángulos, los cuadriláteros, los polígonos regulares, las circunferencias...

El profesor al enseñar geometría no debe renunciar ni obviar ninguno de estos diferentes planteamientos, sino incentivar su uso.

8. ENLACES INTERESANTES SOBRE EL TEMA

Sobre el tema de los lugares geométricos existe mucha bibliografía.

Existen unidades didácticas con las que empezar a practicar como la de la página del MEC

http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Lugares_geometricos_2/INDEX.HTM

Si lo que se quiere es un estudio más completo, con muchos ejercicios demostrados, puede acudirse al libro de Jesús Alfonso Pérez Sánchez que puede descargarse de la página

http://www.ciens.ula.ve/matematica/publicaciones/libros/por_profesor/perez_sanchez_jesus/lugares_geometricos.pdf

Sobre el concepto de coordenadas y sus diferentes tipos, cartesianas, polares etc pueden consultarse:

Las páginas de la Wikipedia para una visión general:

http://es.wikipedia.org/wiki/Coordenadas_polares

http://es.wikipedia.org/wiki/Sistema_de_coordenadas

O si se desea un estudio más académico que sirva de introducción a la geometría analítica

http://www.netverk.com.ar/~migueldc/segundo/Teoria/Cap1.pdf

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 21 – AGOSTO DE 2009

Autoría

- Nombre y Apellidos: Patricia Pérez Ortiz
- Centro, localidad, provincia: IES Torreblanca, Sevilla, Sevilla
- E-mail: patruki957@yahoo.es