ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 21 – AGOSTO DE 2009

“EXPERIENCIAS EDUCATIVAS CON WIRIS TRABAJANDO CON MATRICES Y DETERMINANTES”

AUTORÍA **PATRICIA PÉREZ ORTIZ**
TEMÁTICA **MATEMÁTICAS**
ETAPA **BACHILLERATO**

Resumen

Las matrices y los determinantes es una parte del álgebra fundamental en el bachillerato, dándosele gran importancia en los exámenes de selectividad. Aunque en éstos priman el manejo fluido del cálculo y de sus propiedades sin herramienta electrónica alguna, es conveniente proporcionarles a los alumnos una forma de comprobar los resultados, incluso de trabajar con las propiedades de una manera menos tediosa, para lo que utilizaremos el programa Wiris.

Palabras clave

Matrices. Determinantes. Wiris.

1. INTRODUCCIÓN A LAS MATRICES Y A LOS DETERMINANTES

Las matrices aparecen por primera vez hacia 1850, introducidas por J,J. Silvestre. Hamilton en 1853 inició su desarrollo teórico. En 1858 Cayley introduce la notación matricial como forma abreviada de expresar los sistemas de ecuaciones lineales.

Desde entonces las matrices se han hecho omnipresentes, se utilizan en el cálculo numérico, en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, de ecuaciones diferenciales, de derivadas parciales. Aparecen de forma natural en la teoría de espacios vectoriales y en geometría (por ejemplo en el estudio de los movimientos, cambios de base…), en estadística (matrices de Markov…), economía…

Los números adquieren nuevas dimensiones en los vectores, y éstos se amplían a las matrices.

Los determinantes modernamente están unidos a las matrices. Sin embargo los determinantes surgen a finales del siglo XVII de la mano de Leibnitz antes, por tanto, que las matrices.

Su origen es primeramente geométrico en relación con el cálculo de áreas y volúmenes. El determinante de orden 2 proporcionaba el área orientada del paralelogramo que determinan dos vectores en el plano, el de orden 3 el volumen orientado del paralelepípedo que generan tres vectores

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 21 – AGOSTO DE 2009

en el espacio. El determinante se constituye en el instrumento geométrico que permite definir la idea de orientación, de ahí su utilidad en los conceptos físicos de producto vectorial y producto mixto.

2. INTRODUCCIÓN A WIRIS

Wiris es mucho más que un simple editor científico, es un programa de cálculo simbólico ya que es capaz de trabajar con fórmulas matemáticas. Cada vez más popular en Europa y Latinoamérica no sólo por la multitud de aplicaciones educativas (por ejemplo, es capaz de originar applets) sino porque está en los idiomas de los países en los que se trabaja, y por la posibilidad de trabajar con ella online. En España casi todas las Comunidades Autónomas, tiene su propia versión (así por ejemplo el enlace de la Junta de Andalucía es http://www.juntadeandalucia.es/averroes/wiris/es/index.html).

Wiris es un paquete de productos:

- Wiris CAS que es la plataforma online para cálculos matemáticos.
- Wiris Desktop con el que se trabaja de forma local en tu propio ordenador.
- Wiris Editor es una applet que permite la edición gráfica de fórmulas matemáticas.
- Wiris Player con la que se pueden originar complicados ejercicios interactivos.

3. ALGUNAS INDICACIONES PARA EL TRABAJO EN EL AULA CON WIRIS

Aunque Wiris permite el trabajo online es conveniente tenerlo instalado en el ordenador a fin de poder guardar fácilmente las sesiones para su posterior recuperación y posibles modificaciones. Para ESO y Bachillerato es suficiente con instalar Wiris Little que, aunque es una versión incompleta del Wiris Desktop, permite de igual manera la realización de cálculos sin necesidad de estar conectado a Internet y utilizando los applets estándares de Wiris.

Es importante que el alumno se acostumbre a comentar sus propios ejercicios, de forma que el trabajo realizado le sirva como referente para el estudio posterior.

Antes de meterse con el trabajo de campo, puede ser conveniente dedicar algunas sesiones a que los alumnos se familiaricen con la herramienta.

4. DEFINICIONES, VOCABULARIO Y NOTACIÓN

Dados los conjuntos $I=\{1,2,\cdots,m\}$ y $J=\{1,2,\cdots,n\}$ se denomina matriz de dimensión (orden) mxn sobre el cuerpo K a cualquier aplicación $\begin{array}{c} A: IxJ \to K \\ (i,j) \mapsto A(i,j) \end{array}$. Normalmente se usa la notación con subíndices $(a_{i,j})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$ o más brevemente (a_{ij}), si no existe ambigüedad.

REVISTA INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS DIGITAL

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 21 – AGOSTO DE 2009

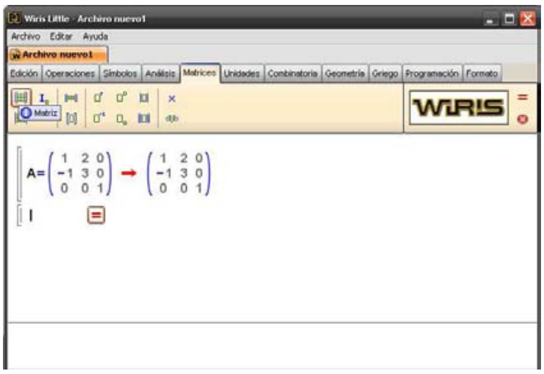
Suele representarse en forma de caja rectangular $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$. La matriz anterior se dice que tiene m filas, primera, segunda, …, m-ésima, y n columnas, primera, segunda, …, n-ésima. Los elementos de una matriz se encuentran en la intersección de una fila y una columna, y se denotan, pues, por su fila y su columna, así a_{ij} designa el elemento de la matriz que se encuentra en la fila i-ésima y en la columna j-ésima.

Dos matrices A y B son, pues, iguales si lo son como aplicaciones, es decir si son del mismo orden y son idénticos cada uno de los elementos que tienen la misma posición en ambas matrices. $(a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ y $(b_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,q}}$ son iguales sii $\begin{cases} m=p \\ n=q \\ a_{ij}=b_{i,j} \quad \forall i,j \end{cases}$.

5. ¿CÓMO INSERTAR MATRICES CON WIRIS?

Introducir matrices en wiris es tan sencillo como ir a la pestaña matrices, pulsar el icono matriz e introducir el número de filas y de columnas que se desea que tenga la matriz. A continuación, se introduce uno a uno los elementos de la matriz.

Veamos un ejemplo:



5. CLASES DE MATRICES

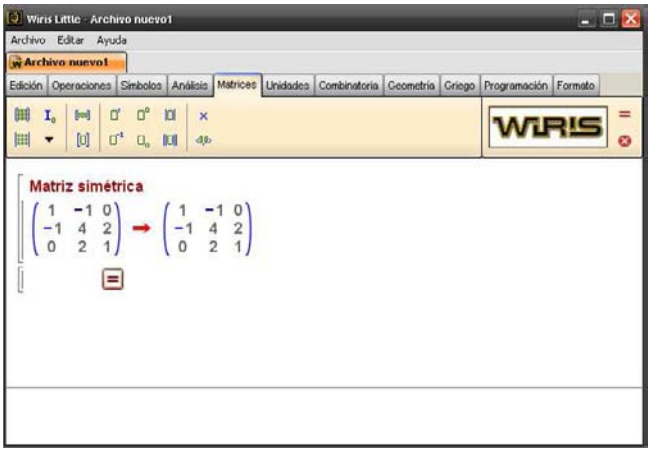
1. Matriz fila. Es aquella matriz que posee una única fila.
2. Matriz columna. Es aquella matriz que posee una única columna

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 21 – AGOSTO DE 2009

3. Matriz cuadrada. Matriz que tiene el mismo número de filas que de columnas. En las matrices cuadradas podemos hablar de diagonales principales (que la forman los elementos a_{ii}) y diagonales secundarias (que la forman los elementos a_{ij} tales que $\begin{cases} i = 1,..,n \\ j = n+1-i \end{cases}$).
4. Matriz simétrica: (a_{ij}) se dice simétrica si es cuadrada y $a_{ij} = a_{ji}$
5. Matriz antisimétrica: (a_{ij}) se dice antisimétrica si es cuadrada y $a_{ij} = -a_{ji}$
6. Matriz triangular superior (inferior) es una matriz (a_{ij}) en que $\forall i > j \ a_{ij} = 0$ ($\forall i < j \ a_{ij} = 0$).
7. Matriz diagonal se dice de aquella matriz cuadrada que es triangular superior e inferior, o aquella que tiene nulos todos sus elementos que no se encuentran en la diagonal principal.
8. Matriz escalar se dice de la matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal son iguales.

5.1. Actividad 1

Utilizando Wiris introduce ejemplos de las matrices mencionadas en el apartado anterior, indicando en el caso de las matrices cuadradas cuál es su diagonal principal y su diagonal secundaria. Introduce líneas de comentarios previamente a cada matriz indicando de qué tipo se trata. Utiliza como guión el siguiente ejemplo:



6. OPERACIONES CON MATRICES

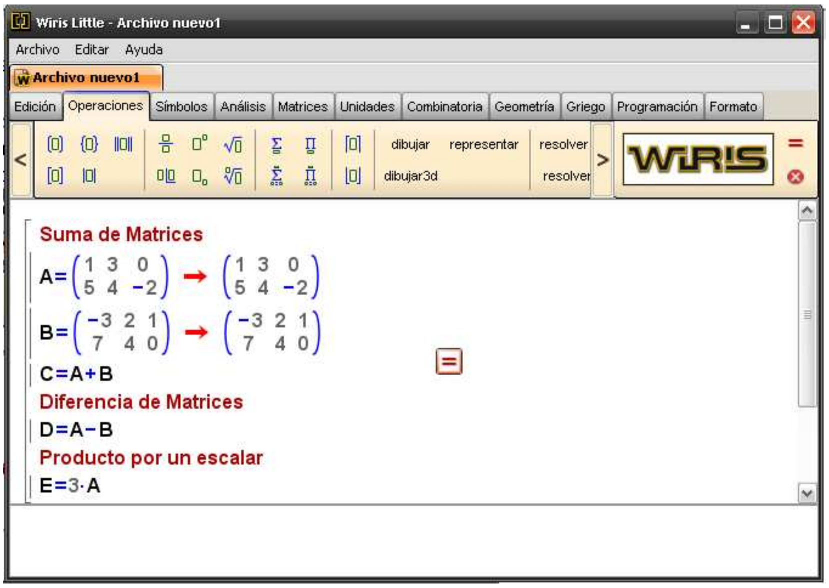
6.1. Estructura de espacio vectorial

El conjunto de las matrices de un mismo orden sobre un cuerpo K poseen estructura de espacio vectorial sobre K.

1. Definición de la suma. Se define la suma de dos matrices como $(a_{ij})+(b_{ij})=(c_{ij})$, esto es el elemento que se encuentra en la posición i,j de la matriz suma es el elemento que se obtiene al sumar los elementos de las dos matrices que se encuentran en la misma posición.
2. Definición del producto por escalares. Se define el producto de un escalar por una matriz como $\lambda(a_{ij})=(\lambda a_{ij})$, esto es el escalar se multiplica por cada elemento de la matriz.
3. Consecuencias:
    a. Las ecuaciones A+X=B son resolubles, y X=B+(-A)=B-A
    b. Las ecuaciones $\lambda X = A\,(\lambda \neq 0)$ son resolubles, y $X=\lambda^{-1}A$

6.2. Actividad 2

- ¿Qué crees que significa la matriz opuesta a otra?
- ¿Cuál es la condición imprescindible para poder sumar dos matrices?
- Realiza la siguiente suma, diferencia y producto por escalar con las matrices que se indican:



Comprueba manualmente que efectivamente son los resultados correctos.

6.3. Actividad 3

Recuerda las propiedades que posee la operación suma con los números reales. Utilizando Wiris comprueba cuáles de ellas se cumplen con la suma de matrices.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 21 – AGOSTO DE 2009

7. PRODUCTO DE MATRICES

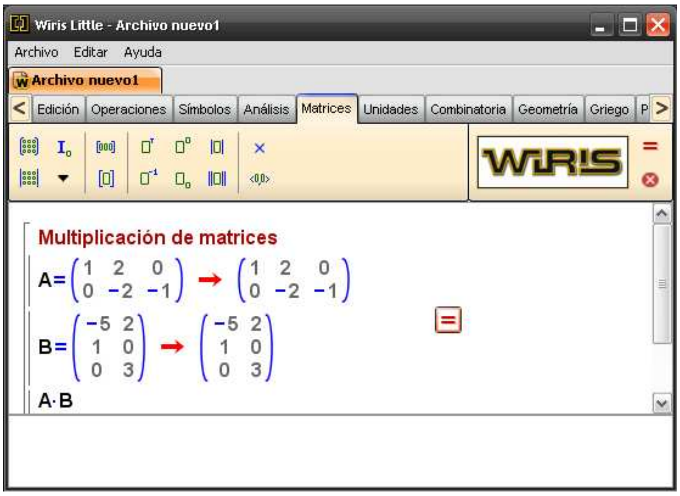
Dadas las matrices $A=\left(a_{i,j}\right)_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$ y $B=\left(b_{i,j}\right)_{\substack{i=1,\dots,p\\ j=1,\dots,q}}$ si n=p se define la matriz producto $C=A.B$ como la matriz $\left(c_{i,k}\right)_{\substack{i=1,\dots,m\\ k=1,\dots,q}}$ donde $c_{i,k}=\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}b_{j,k}$.

Propiedades:

1) El producto de matrices es asociativo.
2) En general no es conmutativo.
3) Es distributivo respecto de la suma: A(B+C)=AB+AC y (B+C)A=BA+CA.
4) $(\lambda A)B=A(\lambda B)=\lambda(AB)$

7.1. Actividad 4

- ¿Cuál es la condición imprescindible para que se puedan multiplicar dos matrices?
- Realiza la siguiente multiplicación de matrices:

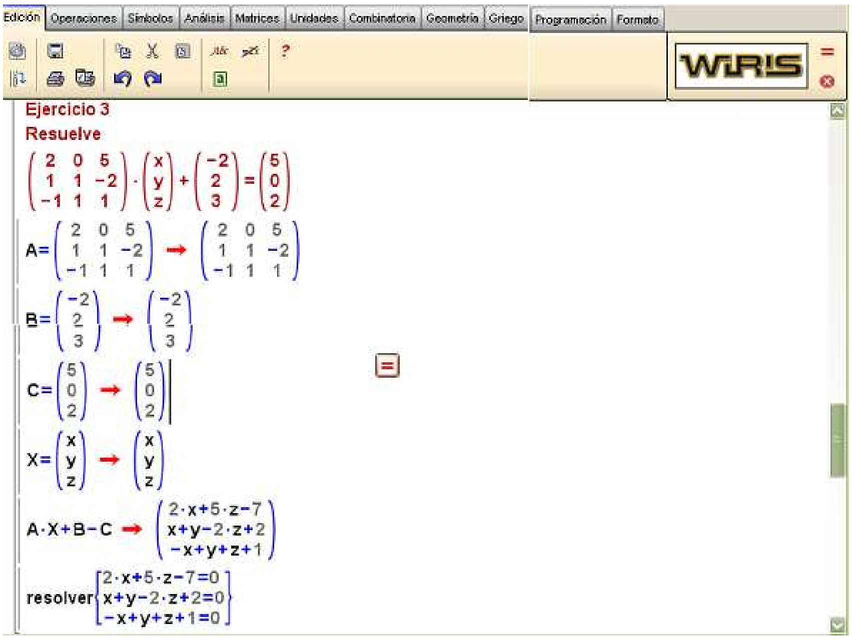


- Prueba las propiedades mencionadas anteriormente. Presta especial atención a la propiedad 2. ¿Por qué crees que la multiplicación de matrices no es en general conmutativa?.
- Realiza esta operación manualmente y comprueba el resultado.

7.3. Actividad 5 (Selectividad)

Fíjate en la siguiente actividad y en cómo se resuelven sistemas de ecuaciones utilizando matrices.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 21 – AGOSTO DE 2009



Averigua la solución.

8. MATRIZ INVERSA

La matriz unidad o identidad (I) de las matrices cuadradas de orden n es aquella matriz escalar que tiene 1 en la diagonal principal. AI=IA=A para toda matriz A.

Una matriz cuadrada A se dice que es invertible o que tiene inversa si existe otra matriz que se designa por A^{-1} que verifica $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Las ecuaciones en el álgebra de las matrices cuadradas AX=B, donde A es invertible, son resolubles y su solución es $X = A^{-1}B$.

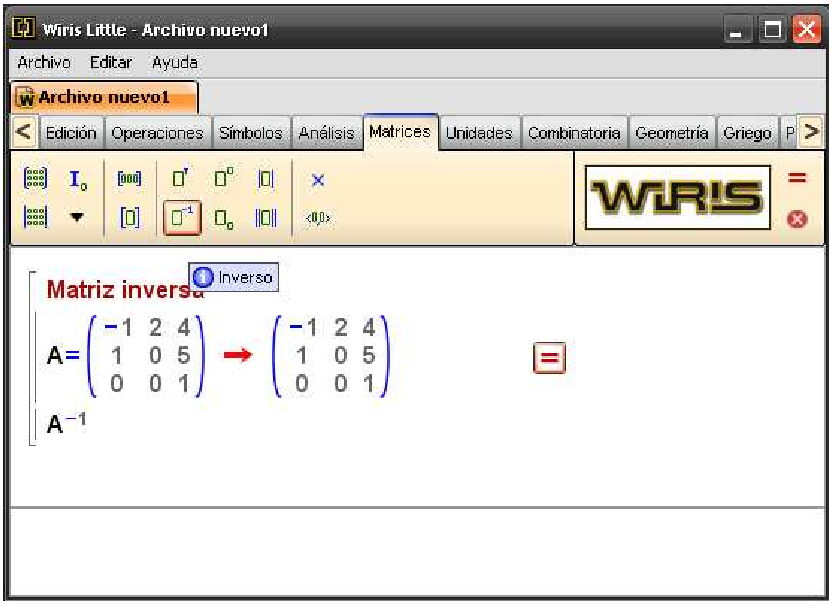
El cálculo de matriz inversa en Wiris es muy sencillo, sin embargo el cálculo manual de la inversa requiere la utilización de algo que se introducirá posteriormente y se conoce como determinantes.

8.1. Actividad 6

Calcula la inversa de la siguiente matriz:

REVISTA DIGITAL INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 21 – AGOSTO DE 2009



9. DETERMINANTES

Existen distintas formas de introducir los determinantes cada una de las cuales permite poner de relieve ciertas propiedades de los mismos:

1. Geométrica ya comentada en la introducción. Es la más intuitiva y permite la justificación de aquellas propiedades que se utilizan en su definición, para llegar a los determinantes como formas multilineales alternadas que toman el valor 1 sobre la base canónica. De ahí su importancia en la caracterización de las bases en los espacios vectoriales y en los conceptos que versan sobre dependencia e independencia lineal, orientación de espacios vectoriales, de superficies…
2. Recursiva, definiendo los determinantes de matrices cuadradas de un determinado orden a partir de las de orden inmediatamente inferior, mediante el desarrollo a partir de los elementos de una fila o columna.
3. Algorítmica $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \left[\sum_{\sigma \in G_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \right]$

Wiris permite fácilmente, sin perderse en cálculos tediosos, analizar la equivalencia de las definiciones anteriormente esbozadas así como la comprobación de muchas propiedades relacionadas con los determinantes, de las que pueden servir como muestra las siguientes:

- Aplicación a las matrices de orden 2: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 21 – AGOSTO DE 2009

- Aplicación a las matrices de orden 3. Regla de Sarrus.
- Si se intercambian dos filas (columnas) el determinante cambia de signo.
- Si se multiplica una fila (columna) por un escalar el determinante también se multiplica por el mismo.
- Si se reemplaza una fila (columna) por la suma de ella misma y el producto de un número por otras el determinante no varía.
- Aplicación del método de triangulación de Gauss para el cálculo de determinantes.

9.1. Actividad 7

Utilizando Wiris resuelve el siguiente ejercicio

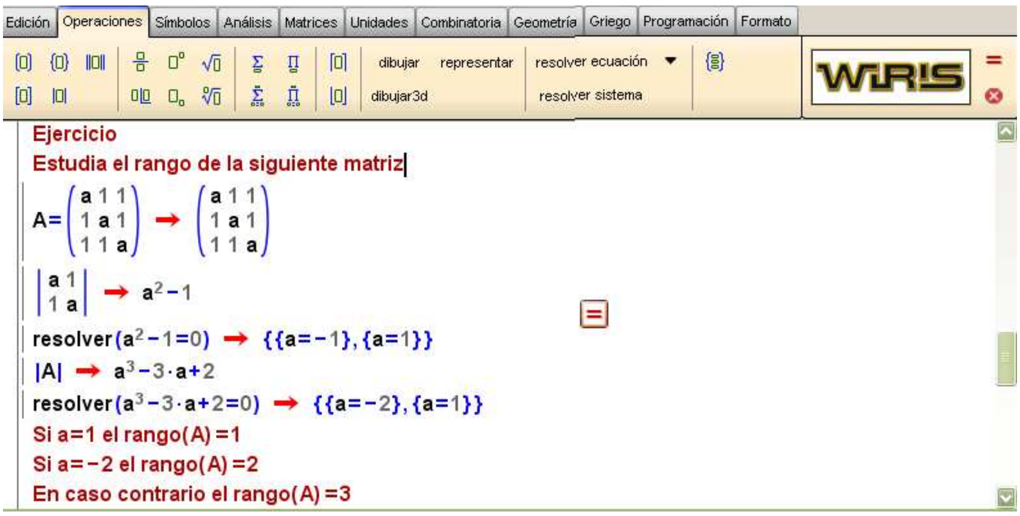
a) Estudia para qué valores de λ existe la inversa de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Calcula la inversa para $\lambda = 0$.

10. APLICACIONES DE LOS DETERMINANTES AL CÁLCULO DE LA INVERSA Y AL CÁLCULO DEL RANGO DE UNA MATRIZ

10.1. Actividad 10 (Resuelta)



10.2. Actividad 11

Utilizando wiris calcula la inversa de la matriz de la actividad 6 haciendo uso de la fórmula

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj\left(A^{t}\right)$$

11. AMPLIACIONES

El tema de las matrices y los determinantes se puede ampliar con multitud de ejercicios sobre las propiedades de los determinantes, incluso unirlo a la resolución de sistemas de ecuaciones. Sin embargo, como antes se ha mencionado, wiris es una herramienta que facilita los cálculos, pero no como único método de resolución, porque en selectividad será necesario que alumno adquiera fluidez en este campo.

12. ENLACES DE INTERÉS

Hay multitud de enlaces de interés relacionados con wiris:

- http://www.wiris.com/ donde aparece información sobre la familia de productos wiris, y enlaces a las calculadoras online de las distintas comunidades, y países.
- http://www.infoymate.es/wiris/ una guía muy práctica del funcionamiento de wiris, además de enlaces para descargarlo y demos para trabajar distintas ramas de las matemáticas (álgebra con matrices, análisis con funciones, y geometría con polígonos regulares)
- http://www.juntadeandalucia.es/averroes/wiris/es/index.html versión online de la calculadora para la comunidad andaluza que incluye una colección de ejercicios para primaria, secundaria y bachillerato.

Autoría

- Nombre y Apellidos: Patricia Pérez Ortiz
- Centro, localidad, provincia: IES Torreblanca, Sevilla, Sevilla
- E-mail: patruki957@yahoo.es