REVISTA INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS DIGITAL

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 22 – SEPTIEMBRE DE 2009

"EXPERIMENTANDO CON LAS CURVAS CICLOIDES EN EL AULA"

AUTORÍA **PATRICIA PÉREZ ORTIZ**
TEMÁTICA **GEOMETRÍA**
ETAPA **ESO, BACHILLERATO**

Resumen

Se intenta poner en contacto al profesor y a los alumnos con algunas curvas que no suelen estar presentes en el currículo de geometría, y que son fáciles de obtener valiéndose de los modernos programas de Geometría Interactiva. Las que aquí se consideran se obtienen al hacer rodar una circunferencia sobre una recta.

Palabras clave

Traslación, rotación, lugar geométrico, cicloides, trocoides.

1. INTRODUCCIÓN

Al igual que la formación matemática actual debe incluir el conocimiento y uso en contexto de los diferentes tipos de números, naturales, enteros, racionales, decimales, porcentajes, irracionales, así también debe incorporar el trabajo y experimentación con distintos tipos de curvas. Éstas suministran modelos y herramientas necesarias para el análisis de los movimientos que las leyes de la naturaleza causan sobre los cuerpos, como las órbitas de los planetas o las parábolas que describen los chorros de agua de la fuente al caer sobre el estanque. Así mismo los artistas, artesanos e ingenieros se sirven de las formas perfectas y bellas que proporcionan las curvas geométricas así como de sus propiedades para la construcción de sus puentes, monumentos y edificios, para el diseño de los jardines, para la creación de cuadros, confección de carteles publicitarios… Al igual que uno de los objetivos del profesor de ciencias naturales es que sus alumnos reconozcan los distintos tipos de animales y plantas, así también el profesor de matemáticas ha de pretender que sus alumnos conozcan los distintos tipos de polígonos y de curvas, así como sus propiedades mas relevantes.

Entre las curvas más famosas cabe citar:

- las líneas rectas y poligonales

- las circunferencias y arcos.
- la familia de las cónicas, que incluye las elipses, hipérbolas y parábolas, que se obtienen seccionando la superficie de un cono mediante distintos planos,
- la familia de las espirales

Tales curvas en su mayor parte ya eran conocidas por los antiguos matemáticos griegos.

Las que en el presente artículo se considerarán pertenecen a la familia de las ruletas, rodantes o curvas cíclicas, y se definen como la trayectoria que describe un punto de una circunferencia cuando ésta rueda sobre una línea recta o sobre otra circunferencia.

Una de las curvas más importantes de la familia de las ruletas es la cicloide. Su nombre proviene de la palabra griega κικλος (rueda). De ésta derivan también palabras como *triciclo, biciclo, bicicleta, ciclomotor, ciclón.* Cicloide, pues, significaría con forma de rueda o círculo, o a modo de rueda.

La cicloide mereció la atención de Galileo quien construiría un modelo de la misma en madera y conjeturaría que el área encerrada entre un arco de cicloide y la recta sobre la que ha rodado el círculo era π veces el área del círculo. Para sorpresa de Galileo, su discípulo el italiano Torricelli y el francés Roberval demostraron que el área bajo el arco de la cicloide era no π veces el área del círculo, sino exactamente 3 veces.

En la cicloide probaron las armas del nuevo cálculo infinitesimal casi todos los grandes matemáticos del siglo XVII: Leibniz, Newton, los hermanos Bernuilli, Jacob y Johann, el marqués de l'Hôpital, y el holandés Huygens. Calcularon su ecuación, la longitud de sus arcos, su área, sus tangentes, y averiguaron muchas propiedades curiosas, como su isocronía. Incluso fue objeto de torneos en los que participaron, al decir de Leibniz, "los matemáticos más agudos que en todo el orbe florecen".

2. METODOLOGÍA

Los programas de Geometría interactiva permiten adelantar de forma experimental a los cursos de ESO contenidos de geometría que hasta ahora no han entrado en el currículo o que lo hacen posteriormente, en bachillerato o formación profesional, y ello desde un punto de vista más algebraico o de geometría analítica.

El trabajo que aquí se propone, sobre las cicloides y sus tipos, está destinado a alumnos de 3º o 4º de ESO, cursos en que se abordan los movimientos en el plano. En él se hace uso de las rotaciones, traslaciones y proporcionalidad. Evidentemente la parte que se refiere a las ecuaciones cartesianas debe quedar relegada a los cursos de bachillerato cuando se dominen los rudimentos de la geometría analítica y sobre todo las ecuaciones paramétricas de la circunferencia, a partir de la introducción de las funciones seno y coseno.

Es posible que el tema propuesto se considere difícil para los alumnos de la última etapa de ESO pero su relación con uno de los objetos más presentes en la sociedad, que se utiliza para el desplazamiento dentro de las ciudades, en el campo, para actividades deportivas, como es la bicicleta, puede otorgar un

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 22 – SEPTIEMBRE DE 2009

toque de interés y de originalidad, y permitirles la experimentación fuera del aula. Rara es la casa donde no haya al menos uno de estos inventos.

El trabajo con los alumnos puede dividirse en tres fases:

1. Planteamiento del problema y experimentación con los objetos que intervienen.

   Enunciado del problema: *¿Cómo se mueven los puntos de la rueda cuando la bicicleta se desplaza por la carretera?*

   Desde muchos de vista cuestiones como la anteriormente enunciada puede considerarse “ideales”, debido a su planteamiento abierto, fácilmente comprensible y de apariencia ajena a la actividad matemática.

   Esta primera fase exige un trabajo en grupo y una posterior puesta en común de los resultados obtenidos. La fase podrá darse por concluida cuando se distingan los objetos que intervienen en el movimiento y se obtenga una representación adecuada de los mismos.

2. Una vez obtenida la representación de la situación que el problema propuesto plantea puede pasarse a una nueva fase experimental y manipulativa utilizando como material el juego del espirógrafo y sus simuladores en web. El juego se revela como una fase más avanzada, más formal, de cara a la experimentación, en la que los objetos reales pierden aquellos aspectos que no son considerados esenciales.

Espirógrafo

   Esta segunda fase puede desarrollarse también utilizando la interesante página que simula el juego anterior http://temasmatematicos.uniandes.edu.co/Trocoides/paginas/espirografo.htm. Tanto el juego como la página web contienen muchos más recursos que los necesarios para el trabajo con las cicloides. Ello sin duda ninguna abrirá nuevos horizontes y planteará nuevos retos a los alumnos.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 22 – SEPTIEMBRE DE 2009

3. La tercera y última fase utiliza el programa de Geometría Interactiva Geogebra con el objetivo de diseñar una construcción que permita la generación de las cicloides. Será necesario analizar los aspectos esenciales, definir los objetos libres que intervendrán en la construcción, recurrir constantemente al ensayo y error, someter a análisis la construcción actual para observar su funcionamiento. Sólo al final espera la satisfacción del trabajo bien hecho.

   A continuación se analiza con más detalle esta fase más técnica.

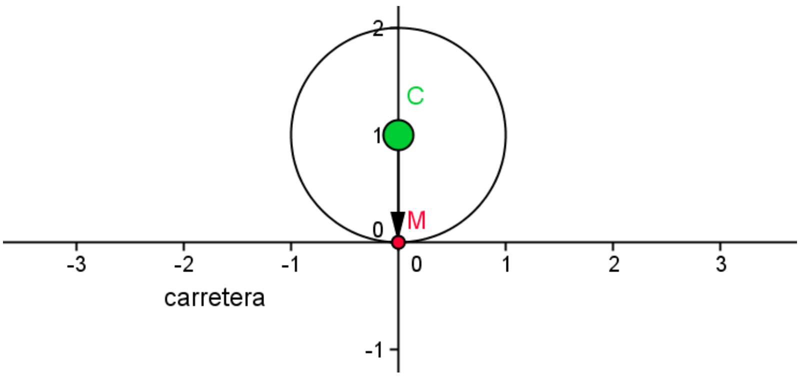
3. CONSTRUCCIÓN DE LA CICLOIDE

La cicloide es la curva que describe un punto de una circunferencia cuando ésta rueda sobre una recta. La cicloide puede visualizarse cuando se desplaza sobre la calzada una bicicleta en la que previamente se ha hecho una pequeña marca con pintura reflectante sobre una de sus llantas o en la que se ha colocado un plástico reflectante.

Para su construcción usaremos el programa libre de Geometría Interactiva, Geogebra.

De la definición de la cicloide se deduce que tres son los elementos necesarios para su construcción:

1) La recta sobre la que se rueda, que puede identificarse con el eje OX.
2) La circunferencia rodante que puede considerarse de radio 1, pues cualquier otro radio no produciría más que un cambio de escala. Tal consideración tiene la ventaja teórica de la coincidencia entre la longitud del arco y la medida en radianes del ángulo comprendido.
3) Un punto sobre la circunferencia, que puede identificarse con el origen de coordenadas.



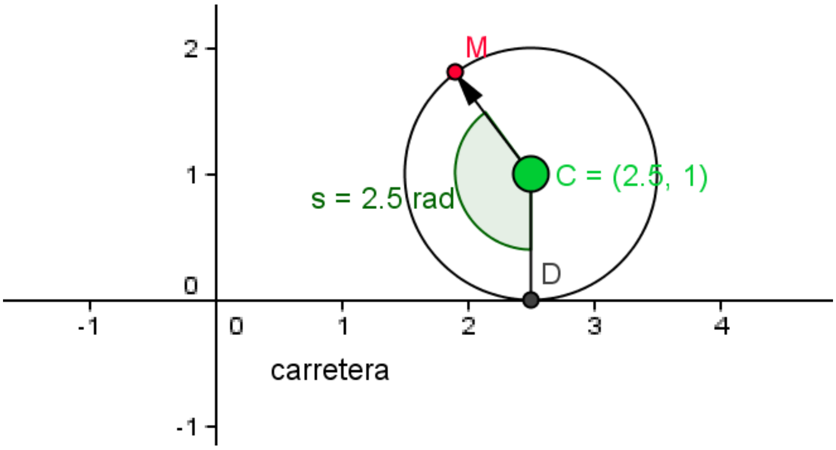
Puesta en escena de los elementos que intervienen en la cicloide

C es el centro de la circunferencia. M es el punto de la circunferencia a considerar y que en el momento inicial o de entrada en escena se encuentra en contacto con la recta.

Cuando la circunferencia se desplaza sobre la carretera una distancia ‘s’ tanto el centro C como el punto M cambian de posición, el primero moviéndose sobre una recta paralela al eje OX y el segundo sobre la circunferencia. El aspecto esencial de este movimiento estriba en que ambos puntos recorren la misma distancia ‘s’.

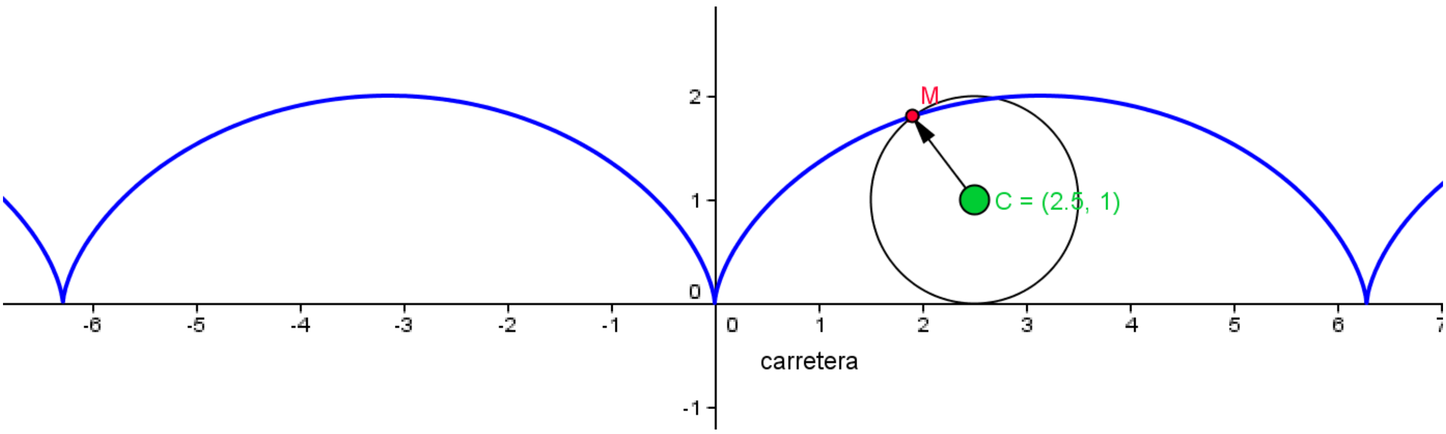
ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 22 – SEPTIEMBRE DE 2009

Haciendo, pues, que C se mueva libremente sobre una recta paralela al eje OX, su primera coordenada puede utilizarse para definir el parámetro ‘s’ anterior. Para calcular la nueva posición del punto M basta con hacer rotar el nuevo punto D de contacto entre la carretera y la circunferencia en torno al centro C el ángulo ‘s’ (en radianes) y en sentido horario.



Lo que sucede cuando la circunferencia empieza a rodar

A medida que la circunferencia rueda el punto M describe la cicloide, la cual puede visualizarse recurriendo al modo de Geogebra “lugar geométrico”. Este modo requiere dos parámetros, el primero de los cuales es el punto M perteneciente al lugar y el segundo el punto C libre sobre la recta paralela al eje OX que hace de carretera.



4. VARIACIONES DE LA CICLOIDE

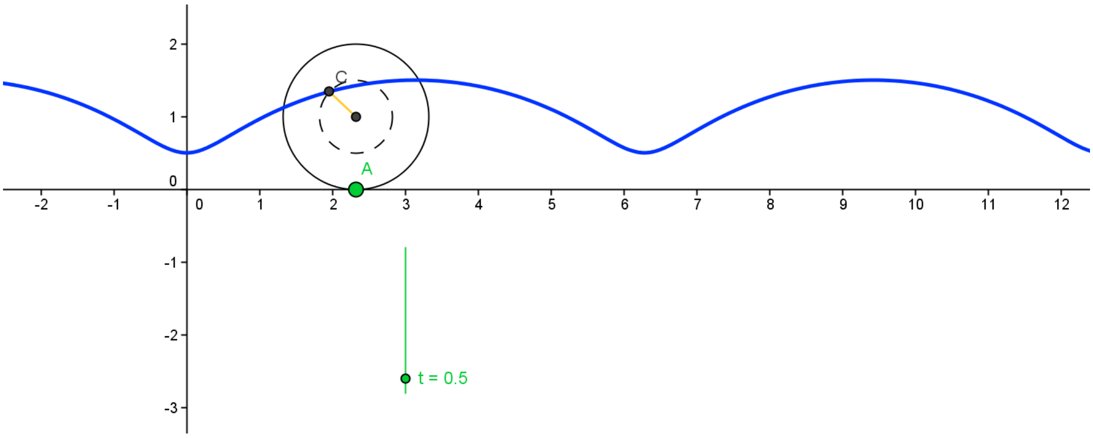
Hemos visto cómo al desplazarse un círculo sobre una recta un punto M situado en la circunferencia frontera genera una curva que se ha llamado cicloide. ¿Qué ocurre si el punto a considerar pertenece al

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 22 – SEPTIEMBRE DE 2009

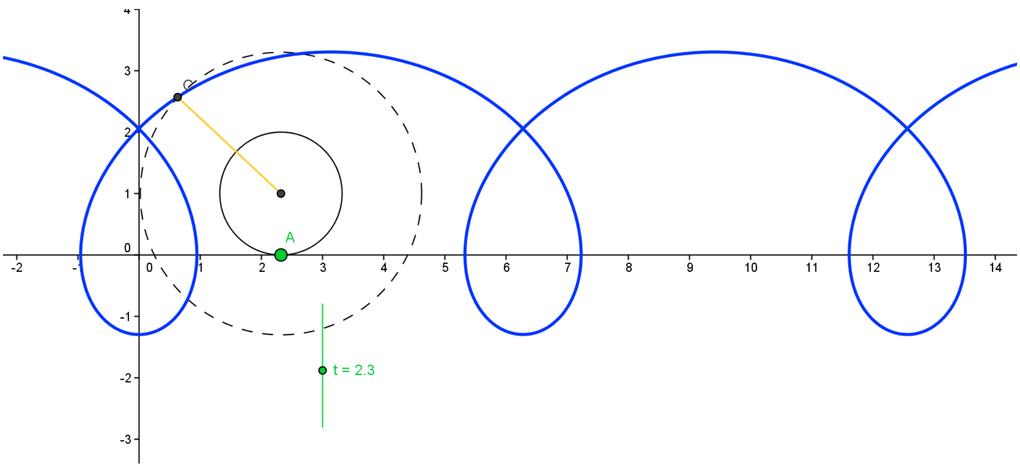
interior o incluso al exterior del círculo? Las nuevas curvas así obtenidas se denominan genéricamente trocoides.

A fin de estudiar estas nuevas situaciones puede ser conveniente introducir un deslizador ‘t’ que sirva para denotar la distancia del centro de la circunferencia rodante al punto que genera la curva. Si t es mayor que 1 el punto se encuentra en el exterior del círculo, si t es menor que 1 estará en el interior y si t es 1 el punto pertenece a la circunferencia y la curva generada será la cicloide. Al arrastrar el punto asociado al deslizador podrán observarse los cambios que se producen en el aspecto de la curva.

En los gráficos que siguen el punto móvil que anteriormente era el centro de la circunferencia se ha situado sobre el eje y se ha recurrido también a una circunferencia auxiliar de radio t a fin de hacer más comprensible el movimiento.

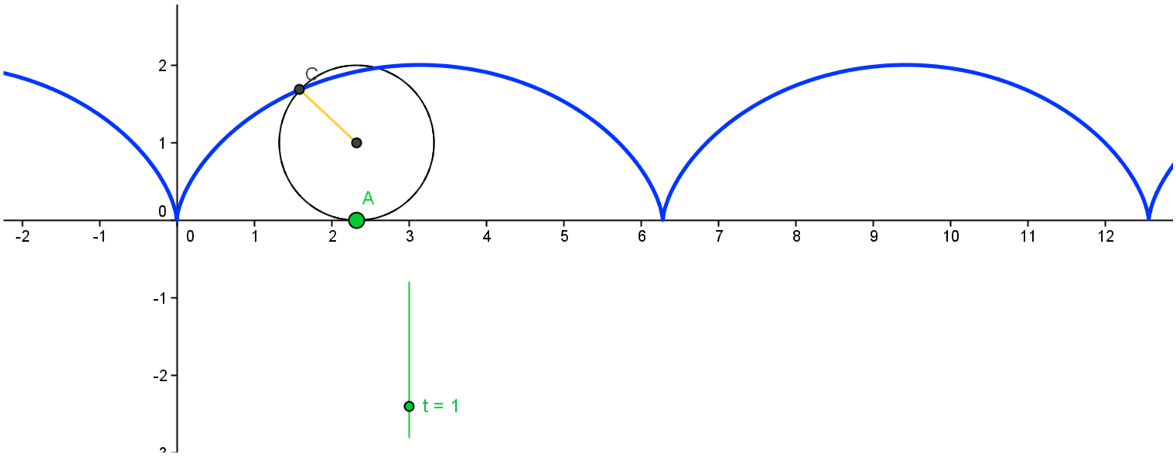


cicloide reducida (t<1)



cicloide alargada (t>1)

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 22 – SEPTIEMBRE DE 2009

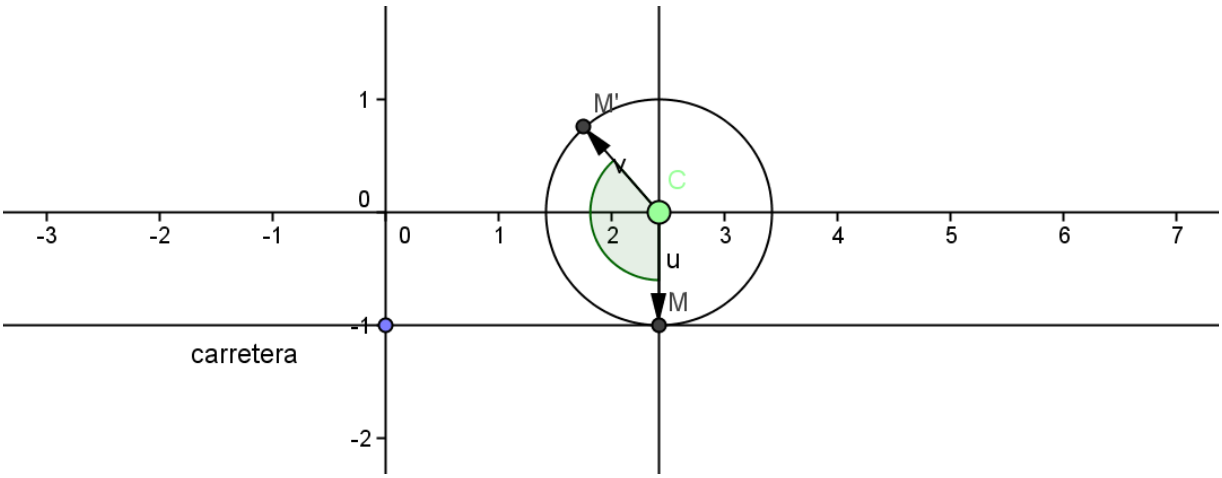


cicloide normal o cicloide (t=1)

Observar cómo cambia la curva al arrastrar el punto asociado al deslizador es una experiencia de la que en manera alguna deben ser privados los alumnos. El placer que supone haber sido capaz de diseñar una construcción y observar cómo a partir de la misma con simples retoques del parámetro t aparecen como por arte de magia curvas que se transforman unas en otras, cómo las suaves ondulaciones de las cicloides reducidas dan lugar a puntos en esquina que se mudan a puntos doble en las cicloides alargadas es sin duda alguna una experiencia que no se olvidará fácilmente.

5. ECUACIONES CARTESIANAS

Tómese el centro C en un determinado momento como origen del sistema de referencia cartesiano y como primer eje la recta paralela a la carretera que pasa por C y como segundo eje la recta perpendicular a la anterior.



REVISTA DIGITAL INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 22 – SEPTIEMBRE DE 2009

La obtención de la ecuación cartesiana de cualquier tipo de cicloide puede efectuarse teniendo en cuenta la composición de los dos tipos de movimientos que intervienen en su generación:

1. El movimiento de traslación del centro de circunferencia que lo lleva al punto de coordenadas $(s,0)$.
2. El movimiento de rotación del punto M de contacto entre la recta y la circunferencia, de ángulo 's' en sentido horario y cuyo centro coincide con el centro de la circunferencia rodante, y que lo transforma en el punto M' $(-\operatorname{sen} s, -\cos s)$. Si finalmente se aplica el factor de proporcionalidad 't' se obtiene el punto $t\,(-\operatorname{sen} s, -\cos s)$.

En resumen cualquier tipo de cicloide adopta la forma cartesiana o puede reducirse a la misma:

$$\begin{cases} x = s - t\ sen\ s \\ y = -t\cos s \end{cases}$$

ecuación en las que t se supone constante.

Si t es menor que 1 la cicloide se dice reducida, si t es mayor que 1 alargada y si t es igual a 1 simplemente cicloide.

6. BIBLIOGRAFÍA

Artículos

- Capítulo 12 de libro "Aventuras Matemáticas" de Miguel de Guzmán, Ediciones Pirámide S.A., Madrid 1995
- http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/archivos1/doctorado/Homenaje/19Gonzalez-LopezMJ.PDF donde se analiza la gestión de la clase utilizando programas de geometría interactiva.

Páginas sobre Geogebra

- http://www.geogebra.org/cms/
- http://recursos.pnte.cfnavarra.es/~msadaall/geogebra/index.htm
- http://geometriadinamica.es/
- http://www.geometriadinamica.cl/
- http://jmora7.com/Arte/arte.htm
- http://roble.cnice.mecd.es/jarran2/
- http://www.iespravia.com/rafa/rafa_geogebra.htm
- http://www.xente.mundo-r.com/ilarrosa/GeoGebra/

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 22 – SEPTIEMBRE DE 2009

Páginas sobre curvas en general

- http://mathworld.wolfram.com/topics/Curves.html
- http://www.gap-system.org/~history/Curves/Curves.html
- http://www.mathcurve.com/courbes2d/courbes2dsp.shtml

Autoría

- Nombre y Apellidos: Patricia Pérez Ortiz
- Centro, localidad, provincia: IES Torreblanca, Sevilla, Sevilla
- E-mail: patruki957@yahoo.es