REVISTA DIGITAL INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 23 – OCTUBRE DE 2009

“RESOLUCIÓN DE ALGUNOS PROBLEMAS ALGEBRAICOS SIN ECUACIONES”

AUTORÍA **PATRICIA PÉREZ ORTIZ**
TEMÁTICA **INVESTIGACIÓN SOBRE LA EDUCACIÓN EN MATEMÁTICAS**
ETAPA **ESO**

Resumen

Se propone una colección de problemas con una estructura análoga. Todos ellos son resueltos siguiendo un mismo algoritmo prealgebraico basado en la respuesta a cuestiones formuladas verbalmente. Podría ser un primer paso en la elaboración de colecciones de problemas que sirvieran de iniciación al álgebra.

Palabras clave

Álgebra, problemas análogos.

1. INTRODUCCIÓN Y CONSIDERACIONES METODOLÓGICAS

Los libros de matemáticas para ESO contienen muchos problemas y actividades a fin de que el alumno se ejercite en la utilización de incógnitas, las famosas ‘x’ e ‘y’, así como en el planteamiento y resolución de ecuaciones. Sin embargo muchos de estos problemas pueden resolverse de forma más “natural” sin necesidad del álgebra. Estimular esta forma de resolución suele llevar a descubrir semejanzas, estructuras que se repiten, esquemas implícitos, campos de problemas análogos. Sería oportuno analizar sus diferentes estructuras a fin de que aquellos que posean una estructura análoga puedan considerarse como casos particulares de un mismo modelo, así como elaborar colecciones de problemas análogos.

En el presente trabajo se han reunido algunos problemas que usualmente se resuelven mediante incógnitas. Aquí se han resuelto sin recurrir al álgebra, poniendo de relieve la analogía que subyace en ellos, a fin de poder invitar a los alumnos a descubrir su idéntica estructura. Un mismo formulario con unas sencillas cuestiones que utilizan las operaciones elementales, suma, resta, multiplicación y división, servirá de guía.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 23 – OCTUBRE DE 2009

Algunos de los problemas, en concreto los dos primeros, se refieren a conjuntos con un número pequeño de elementos a fin de que puedan resolverse fácilmente de modo gráfico. El primero habla de 8 mesas y el segundo de 10 monedas. Los dos problemas son resueltos primero apoyándose en el dibujo y después respondiendo a unas sencillas cuestiones numéricas. A continuación se proponen idénticos problemas incrementando el número de elementos de forma que adquiera primacía el razonamiento verbal.

Todos los problemas aluden a objetos de dos tipos, mesas de 3 y 4 patas, monedas de 20 y 50 céntimos, conejos y gallinas que se venden a distintos precios etc. Y proporcionan dos totales: el de objetos (mesas, monedas, animales…) y el que alude al tipo que permite la clasificación (patas, valor, importe de la venta…). El problema se da por resuelto cuando se averigua cuántos objetos hay de cada uno de los tipos.

La técnica que se emplea en la resolución de estos problemas consiste en una mezcla de lo que suele llamarse reducción a casos más sencillos ("y si todos los objetos fueran del mismo tipo") y método del ensayo y error ("algunos de los objetos anteriores se cambian de tipo a fin de hacer encajar los datos del problema"). La suposición de que todos los objetos sean del mismo tipo puede practicarse por defecto (tomando el tipo inferior) o por exceso (suponiendo que todos los objetos son del tipo superior). En ambos supuestos la técnica es similar.

En todos los ejemplos propuestos se ha empleado la suposición inicial por defecto. Así por ejemplo si hay mesas de 3 y 4 patas, en la hipótesis de partida se ha supuesto que todas son de 3 patas. El profesor/alumno puede adoptar la suposición por exceso, o si lo prefiere hace uso de ambas.

Los problemas se han ordenado atendiendo a su mayor nivel de dificultad, según hagan uso sólo de los números naturales o también de los números decimales, por la mayor dificultad que en éstos entraña el dominio de las estructuras multiplicativas.

2. PROBLEMA 1

Enunciado:

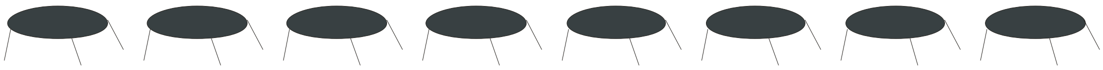
En una casa hay 8 mesas en total. Algunas de ellas tienen 4 patas y las restantes 3. En total hay 27 patas. ¿Cuántas mesas hay de cada clase?

Análisis:

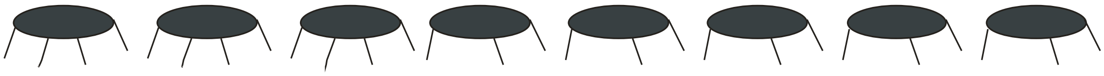
Se mencionan dos tipos de mesas con 3 y con 4 patas. Y dos totales: el de mesas, 8, y el de patas, 27.

Resolución gráfica:

Si todas las mesas tuvieran 3 patas:



En total habría 24 patas. Como debe haber 27 faltan 3 patas. Por lo que 3 mesas deben tener 4 patas.



Resolución verbal

1. Si las 8 mesas tuvieran 3 patas el total de patas debería haber sido 8x3=24.
2. Como el número total de patas es 27 faltan 27-24=3 patas.
3. Como cada nueva mesa de 4 patas añade 4-3=1 pata son necesarias 3 mesas de 4 patas.
4. Respuesta: Hay 3 mesas de 4 patas y 5 mesas de 3 patas.

3. PROBLEMA 2

Enunciado:

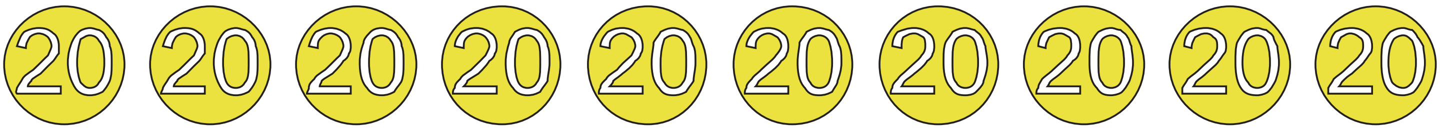
Un monedero tiene 10 monedas algunas de las cuales son de 20 céntimos y las restantes de 50. Si su valor total es 4,1€, ¿cuántas monedas hay de cada clase?

Análisis:

Se mencionan dos tipos de monedas, unas cuyo valor es 20 céntimos de euro y el resto de 50 céntimos. El número total de monedas es 10, y su valor total es 4,1 euros.

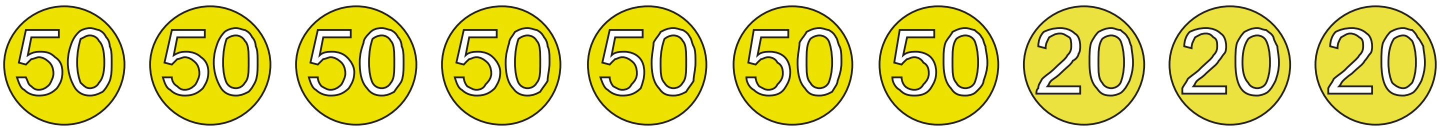
Resolución gráfica:

Si las 10 monedas fuesen de 20 céntimos



En total habría 200 céntimos. Como debe haber 410 faltan 210. Como cada moneda de 50 céntimos añade 30 céntimos a las de 20, para obtener 210 son necesarias 7 monedas de 50 céntimos.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 23 – OCTUBRE DE 2009



Resolución verbal

1. Si cada una de las 10 monedas fuese de 20 céntimos el valor total sería $10 \times 0'2 = 2$ euros
2. Como el valor total es 4,1 euros faltan $4{,}1 - 2 = 2'1$ euros.
3. Como cada moneda de 50 céntimos añade 0’30 euros a cada moneda de 20 céntimos ($0'50 - 0'20 = 0'30$) son necesarias 7 monedas de 50 céntimos ($2'1 \div 0'3 = 7$).
4. Respuesta: Hay 7 monedas de 50 céntimos y 3 monedas de 20 céntimos.

4. PROBLEMA 3

Enunciado:

En un almacén hay 35 mesas en total. Algunas de ellas tienen 4 patas y las restantes 3. En total hay 120 patas. ¿Cuántas mesas hay de cada clase?

Análisis:

Se mencionan dos tipos de mesas con 3 y con 4 patas. Y dos totales: el de mesas, 35, y el de patas, 120.

Resolución gráfica:

Al aumentar el número de objetos resulta impracticable.

Resolución verbal

1. Si las 35 mesas tuvieran 3 patas el total de patas sería $35 \times 3 = 105$
2. Como el número total de patas es 120 faltan $120 - 105 = 15$ patas.
3. Como cada nueva mesa de 4 patas añade 1 pata ($4 - 3 = 1$) son necesarias 15 mesas de 4 patas.
4. Respuesta: Hay 15 mesas de 4 patas y 20 mesas de 3 patas.

INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS
REVISTA DIGITAL

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 23 – OCTUBRE DE 2009

5. PROBLEMA 4

Enunciado:

En una hucha hay 38 monedas algunas de las cuales son de 20 céntimos y las restantes de 50. Si el valor total del contenido de la hucha es 10€, ¿cuántas monedas hay de cada clase?

Análisis:

Se mencionan dos tipos de monedas, unas cuyo valor es 20 céntimos de euro y el resto de 50 céntimos. El número total de monedas es 38, y su valor total es 10 euros o 1000 céntimos.

Resolución gráfica:

Al aumentar el número de objetos resulta impracticable.

Resolución verbal

1. Si las 38 monedas fuesen de 20 céntimos cada una el valor total sería $38 \times 0'2 = 7'6$
2. Como el valor total es 10 euros faltan $10 - 7'6 = 2'4$ euros.
3. Como cada moneda de 50 céntimos añade 0’30 euros al valor total ($0'50 - 0'20 = 0'30$) son necesarias 8 monedas de 50 céntimos ($2'4 \div 0'3 = 8$).
4. Respuesta: Hay 8 monedas de 50 céntimos y 30 monedas de 20 céntimos.

6. PROBLEMA 5

Enunciado:

Problema clásico: *En un corral hay 32 animales entre conejos y gallinas. Sabiendo que el número de patas en total es 106. ¿Cuántos animales hay de cada clase?*

Análisis:

Se mencionan dos tipos de animales, los conejos que tienen 4 patas y las gallinas que tienen 2 patas. El número total de animales es 32. Y el número total de patas es 106.

Resolución verbal

1. Si todos los 32 animales fuesen gallinas el total de patas sería $32 \times 2 = 64$
2. Como el número total de patas es 106 faltan $106 - 64 = 42$ patas.
3. Como cada conejo añade 2 patas ($4 - 2 = 2$) son necesarios 21 conejos ($42 \div 2 = 21$).

4. Respuesta: Hay 21 conejos y 11 gallinas.

7. PROBLEMA 6

Enunciado:

Un granjero vende en el mercado 200 animales entre conejos y gallinas. Por la venta ha obtenido 820 €, habiendo vendido los conejos a 3,5 € y las gallinas a 6€. ¿Cuántos animales hay de cada clase?

Análisis:

Se mencionan animales de dos tipos, los conejos que tienen un precio de 3,5€ y las gallinas de 6€. El número total de animales es 200. Y el número total de euros obtenidos por su venta es 820.

Resolución verbal

1. Si los 200 animales fuesen conejos el total de euros obtenidos por su venta sería $200 \times 3'5 = 700$
2. Como el número total de euros obtenidos en la venta fue 820 faltan $820 - 700 = 120$ euros.
3. Como cada gallina añade 2,5 euros al precio de los conejos ($6 - 3'5 = 2'5$) son necesarias 48 gallinas ($120 \div 2'5 = 48$).
4. Respuesta: Hay 48 gallinas y 152 conejos.

8. PROBLEMA 7

Enunciado:

Un comerciante dispone de aceite de oliva de dos clases, una de las cuales vende a 2,5€ el litro y la otra a 2,8€. Mezclándolos desea obtener 30 litros que vendería a 2,55€ el litro. ¿Cuántos litros de aceite debe mezclar de cada clase?

Análisis:

Se mencionan dos clases de aceite, uno que se vende a 2’5 euros el litro y otro a 2’8 euros. El número total litros es 30. Y su valor total tras la venta sería 76,5 euros $(30 \times 2{,}55 = 76{,}5)$.

Resolución verbal

1. Si los 30 litros valiesen a 2,5 euros cada uno su valor total sería 75 euros ($30 \times 2{,}5 = 75$)
2. Como el valor total es 76,5 euros faltan 1,5 euros ($76{,}5 - 75 = 1{,}5$).
3. Como cada litro de precio 2,8 euros añade 0’30 euros al valor total ($2{,}80 - 2{,}50 = 0'30$) son necesarios 5 litros de 2,8 euros ($1{,}5 \div 0{,}3 = 5$).

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 23 – OCTUBRE DE 2009

4. Respuesta: Deben mezclarse 5 litros de 2,8 euros con 25 litros de 2,5 euros.

9. PROBLEMA 8

Enunciado:

Se dispone de dos clases de alcohol del 78% y 90% de pureza. Mezclándolos se desean obtener 15 litros al 82%. ¿Cuántos litros es necesario mezclar de cada clase?

Análisis:

Se mencionan dos tipos de alcohol, uno cuya pureza es del 78% y otro del 90%. El número total litros que se desea obtener es 15 con un nivel de pureza del 82%. La cantidad total de alcohol tras la mezcla sería 12,3 litros $(15 \times 0{,}82 = 12{,}3)$.

Resolución verbal

1. Si los 15 litros tuviesen un nivel de alcohol del 78% la cantidad total de alcohol sería 11,7 litros $(15 \times 0{,}78 = 11{,}7)$
2. Como la cantidad total de alcohol debe ser 12,3 litros faltan 0,6 litros $(12{,}3 - 11{,}7 = 0{,}6)$.
3. Como cada litro de pureza 90% aporta 0,12 litros de alcohol adicionales $(0{,}90 - 0{,}78 = 0'12)$ son necesarios 5 litros de pureza 90% $(0{,}6 \div 0{,}12 = 5)$.
4. Respuesta: Deben mezclarse 5 litros de pureza 90% con 10 litros de pureza 78%.

10. PROBLEMA 9

Enunciado:

En un supermercado se han adquirido 3 kilos de carne los cuales se han obtenido mezclando dos tipos de carne, de precios una a 4,5 euros el kilo y la otra a 6,5 euros. Si se han pagado en total 15 euros, ¿cuántos kilos se ha comprado de cada clase?

Análisis:

Se mencionan dos tipos de carne, una de precio 4,5 euros el kilo y la otra a 6,2 euros. El número total de kilos es 3 y el coste total del producto 15 euros.

Resolución verbal

1. Si los 3 kilos hubiesen sido de la carne de precio 4,5 euros su importe debería haber sido 13,5 euros (3 x 4,5=13,5)

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 23 – OCTUBRE DE 2009

2. Como el importe fue de 15 euros faltan 1,5 euros (15 – 13,5 = 1,5).
3. Como cada kilo de carne de precio 6,5 euros aporta 1,7 euros adicionales (6,2 – 4,5 = 1,7) son necesarios de la misma aproximadamente 0,882 kilos ($1{,}5 \div 1{,}7 = 0{,}882$).
4. Respuesta: Se han comprado 0,882 kilos de carne a 6,2 euros el kilo y 2,118 kilos de carne a 4,5 euros el kilo.

11. CONCLUSIÓN

Todos los problemas aquí propuestos y aquellos análogos que puedan plantearse disponen, pues, de un algoritmo de resolución verbal que consta de tres sencillas preguntas, cuya respuesta sólo implica operaciones aritméticas elementales. La resolución gráfica de los dos primeros intentaba estimular y provocar la formulación de las tres preguntas.

Estructura general

La estructura de los problemas aquí planteados puede resumirse en la tabla:

	Cantidad	**Cualidad numérica de cada objeto (precio, número de patas…)**	**Parciales**
Objetos tipo 1	x	p	p.x
Objetos tipo 2	y	q	q.y
TOTAL	A		B

O más formalmente en el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = A \\ px + qy = B \end{cases}$$

Resolución general

1. Si cada uno de los A objetos gozara de la cualidad numérica p el total en vez de B hubiera sido pA
2. Al ser el total B faltan (sobran) B-pA.
3. Como cada nuevo objeto del tipo q añade (resta) q-p son necesarios $\frac{B - pA}{q - p}$ objetos del tipo q.
4. Respuesta: Hay $\frac{B - pA}{q - p}$ del tipo q y el resto $A - \frac{B - pA}{q - p}$.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 23 – OCTUBRE DE 2009

12. BIBLIOGRAFÍA

Artículos y libros:

- Razonamiento visual y matemáticas: http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2921468
- Tópicos matemáticos, Álgebra geométrica, Notas históricas http://divulgamat.ehu.es/weborriak/Historia/Topicos/AlgebraGeometrica/AlgebraGeometrica1.asp
- Artículos relacionados con Gascón Joseph y su artículo "El papel de la resolución de problemas en la enseñanza de las Matemáticas" donde analiza los distintos paradigmas epistemológicos.
- Libros de Miguel de Guzmán:

  Guzmán, M. de - (1976) Mirar y ver. Alhambra. Madrid.

  Guzmán, M. de - (1984) Cuentos con cuentas. Lábor. Barcelona.

  Guzmán, M. de - (1986) Aventuras matemáticas. Lábor. Barcelona.

  Guzmán, M. de - (1987) Enseñanza de la matemática a través de la resolución de problemas. ICE de la Universidad de Zaragoza.

  Guzmán, M. de - (1991) Para pensar mejor. Lábor. Barcelona.

Autoría

- Nombre y Apellidos: Patricia Pérez Ortiz.
- Centro, localidad, provincia: IES Torreblanca, Sevilla, Sevilla
- E-mail: patruki957@yahoo.es