ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 23 – OCTUBRE DE 2009

“EXPERIMENTANDO CON LAS CURVAS EPICICLOIDES E HIPOCICLOIDES EN EL AULA”

AUTORÍA **PATRICIA PÉREZ ORTIZ**
TEMÁTICA **GEOMETRÍA INTERACTIVA**
ETAPA **ESO, BACHILLERATO**

Resumen

Se intenta poner en contacto a profesores y alumnos con algunas curvas que no suelen estar presentes en el currículo de geometría y que son fáciles de obtener valiéndose de los modernos programas de Geometría Interactiva. Las que aquí se consideran surgen al hacer rodar sobre una circunferencia otra que es tangente exterior o interior a aquélla.

Palabras clave

Traslación, rotación, lugar geométrico, cicloides, epicicloides e hipocicloides.

1. INTRODUCCIÓN

La experimentación y el reconocimiento de los distintos tipos de curvas debe ser parte integrante del currículo de matemáticas de la educación secundaria y del bachillerato. Las curvas que aquí se presentarán pertenecen a la familia de las ruletas, o rodantes, también llamadas curvas cíclicas, y se definen como la trayectoria que describe los puntos de una circunferencia cuando ésta rueda sobre una línea recta o sobre otra circunferencia.

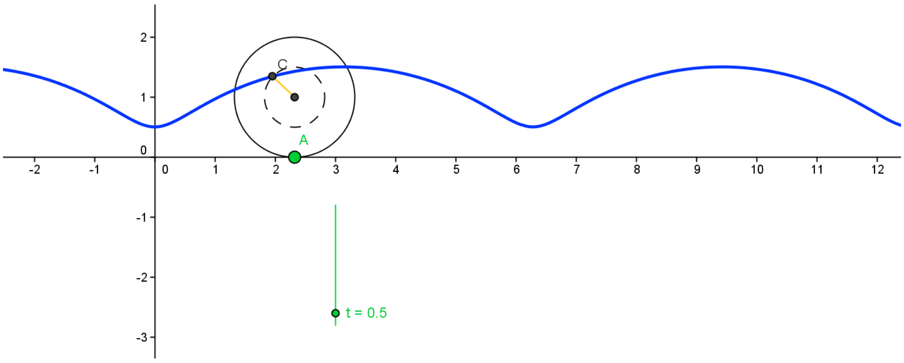
Un trabajo anterior publicado en esta misma revista y que llevaba por título “Experimentando con las curvas cicloides en el aula” puede ser tenido como prólogo del presente. De ahí la repetición de algunas ideas y gráficas con el único objeto de hacer que éste pueda comprenderse por sí mismo, sin necesidad de recurrir al anterior.

Las cicloides son tenidas por curvas más simples, más fáciles de entender y cuyo estudio sirve de antesala a las que aquí se considerarán. En las cicloides la circunferencia rueda sobre una recta, al modo como una bicicleta rueda sobre una carretera. Las epicicloides se obtienen al rodar una circunferencia sobre otra siendo ambas circunferencia tangentes exteriores. Las hipocicloides se

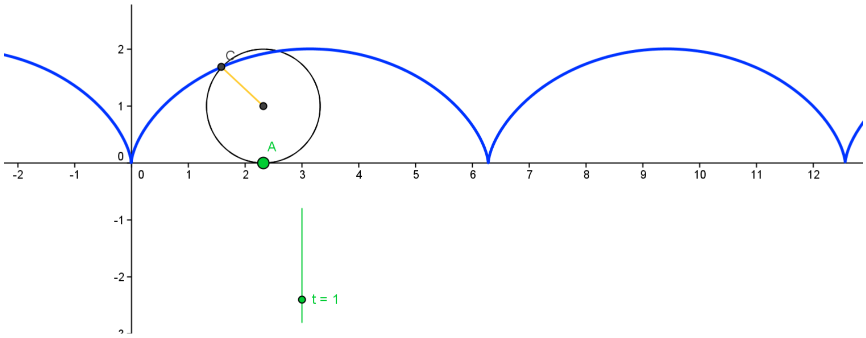
ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 23 – OCTUBRE DE 2009

obtienen al rodar una circunferencia por el interior de otra siendo ambas tangentes interiores. Sus nombres tienen su origen en las preposiciones griegas 'epi' (sobre) e 'hipo' (por debajo).

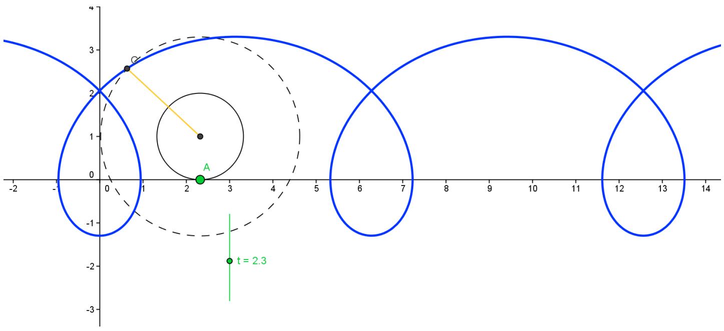
Las cicloides y sus variantes constituyen una familia de curvas con mucho parecido formal entre ellas.



cicloide reducida



cicloide normal o simplemente cicloide



cicloide alargada

Bajo ese aspecto formal las cicloides son menos interesantes que las familias de las epicicloides e hipocicloides. Pequeñas variaciones en los parámetros en éstas últimas permiten desplegar un enorme abanico de formas, una ingente diversidad de objetos geométricos que parece imposible que estuvieran ocultos en la monotonía del plano y que un simple toque mágico haga surgir del anonimato. Trabajar con todas estas formas, verlas desplegar su belleza y atractivo es una experiencia inolvidable desde el

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 23 – OCTUBRE DE 2009

punto de vista artístico, del que no debe privarse a los alumnos. El placer que supone haber sido capaz de diseñar una construcción y observar cómo a partir de la misma con simples retoques de los parámetros aparecen como por arte de magia curvas que se transforman unas en otras dignifica el esfuerzo requerido.

2. METODOLOGÍA

El trabajo que aquí se propone, sobre las epicicloides, hipocicloides y sus tipos, está destinado a alumnos de 3º o 4º de ESO, cursos en que se abordan los movimientos en el plano. Podría programarse después de las unidades sobre rotaciones, traslaciones y proporcionalidad, tras el estudio de las cicloides, o bien como parte de una unidad más genérica sobre lugares geométricos, que incluyera las ruletas. Evidentemente el apartado del presente trabajo que hace referencia a las ecuaciones cartesianas debe posponerse a los cursos de bachillerato cuando se dominen los rudimentos de la geometría analítica y sobre todo las ecuaciones paramétricas de la circunferencia, tras la introducción de las funciones seno y coseno.

El trabajo con los alumnos podría dividirse en tres niveles:

1. Planteamiento del problema y experimentación con los objetos que intervienen.

   Enunciado del problema: *¿Qué curva describen los puntos de una circunferencia cuando se mueven sobre otra circunferencia?*

   La experimentación puede llevarse a cabo utilizando el juego del espirógrafo

Espirógrafo

   o/y sus simuladores en web :

   http://temasmatematicos.uniandes.edu.co/Trocoides/paginas/espirografo.htm

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 23 – OCTUBRE DE 2009

Este primer nivel debe concluir con la puesta en común de los resultados obtenidos, en la que se distingan claramente los objetos que intervienen en el movimiento y se realice una representación adecuada de los mismos.

2. En el segundo nivel, mediante el programa de Geometría Interactiva Geogebra, se diseña una construcción que permita la generación de las epicicloides e hipocicloides. Será necesario definir los objetos libres y las variables que intervendrán en la construcción, recurrir constantemente al ensayo y error, someter a análisis los resultados y el funcionamiento de la construcción, corregir lo que no responda adecuadamente.

   A continuación se analizará con detalle esta fase más técnica.

3. En el tercer nivel puede proponerse a los alumnos la construcción de una galería de curvas epicicloides e hipocicloides. La recopilación se expondrá posteriormente en la clase e incluso en el Instituto. Sería oportuno que la exposición se realizase en colaboración con el departamento de plástica o dibujo. La página web anteriormente citada contiene una selección de epicicloides e hipocicloides realizada por alumnos que puede tomarse como modelo.

3. CONSTRUCCIÓN DE LA EPICICLOIDE

Las epicicloides son las curvas que describen los puntos de una circunferencia cuando ésta rueda sobre otra circunferencia. Para su construcción usaremos el programa libre de Geometría Interactiva, Geogebra.

3.1 Objetos que intervienen

De la definición de las epicicloides se deduce que tres son los objetos necesarios para su construcción:

1. La circunferencia sobre la que se rueda, o inmóvil.
2. La circunferencia rodante.
3. El punto de tangencia entre ambas circunferencias fija y móvil.

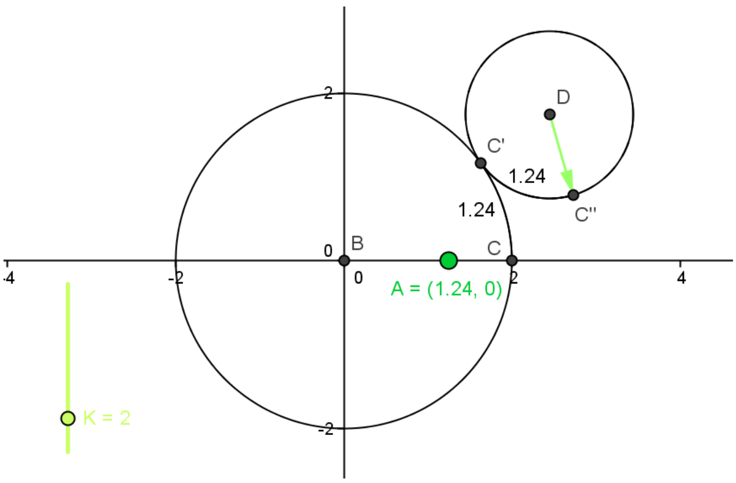
3.2 Decisiones previas que hacen más sencilla la construcción

- El origen de coordenadas, B, es el centro de la circunferencia fija.
- La circunferencia rodante se toma de radio 1. Como la forma de la epicicloide depende de la relación entre los radios de las circunferencias fija y móvil, no será necesario hacer variar los radios de ambas. Así circunferencias fijas de radios 4 y 2 frente a circunferencias móviles de radios 2 y 1 producirían esencialmente las mismas curvas. Además de ahorrar parámetros tiene la ventaja teórica de hacer coincidir la longitud del arco y la medida en radianes del ángulo comprendido.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 23 – OCTUBRE DE 2009

- Con objeto hacer variar interactivamente la proporción entre los radios de las circunferencias se introduce un deslizador de nombre ‘K’ que coincidirá con el radio de la circunferencia inmóvil.
- Se define sobre el eje OX un punto libre A, cuya primera coordenada será la distancia recorrida. El lugar geométrico se genera al variar ésta. Así será fácil comprobar cómo al arrastrar el punto Acon el ratón la circunferencia rodante se mueve sobre la circunferencia inmóvil.

3.3 Proceso constructivo con Geogebra



Lo que sucede cuando la circunferencia empieza a rodar

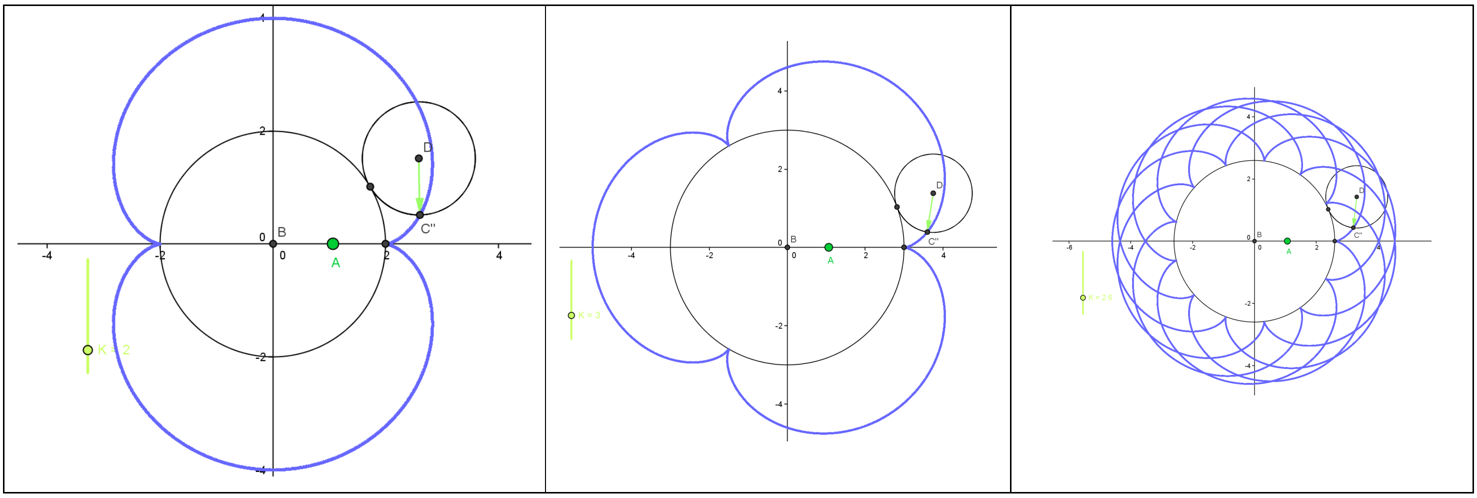
1. Se crea un deslizador, K, que representa el radio de la circunferencia inmóvil.
2. Se construye la circunferencia inmóvil, de centro el origen de coordenadas y radio K.
3. Sobre ésta se define un punto C que servirá de punto de tangencia, por ejemplo aquél en que la parte positiva del eje corta a la circunferencia.
4. Se toma un punto A arbitrario sobre el eje OX, cuya primera coordenada ‘s’ define la longitud recorrida por la circunferencia rodante sobre la circunferencia inmóvil.
5. El punto C se somete a una rotación de centro el de la circunferencia inmóvil y ángulo en radianes s/K dando lugar a un nuevo punto de tangencia C’.
6. El centro D la circunferencia rodante se encuentra en la semirrecta de origen B que pasa por C’ y a distancia 1 de C’ por la parte de fuera.
7. El punto C’’ se obtiene mediante rotación de centro D y ángulo en radianes s del punto C’.
8. El lugar geométrico lo genera el punto C’’ cuando el punto A se desplaza sobre el eje OX.

REVISTA DIGITAL INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 23 – OCTUBRE DE 2009

3.4 Ejemplos de algunas epicicloides

Al arrastrar el punto ligado al deslizador K pueden observarse los cambios que se producen en las epicicloides



4. VARIACIONES DE LAS EPICICLOIDES

Hemos visto cómo al rodar una circunferencia sobre otra los puntos de aquélla generan las epicicloides. ¿Qué ocurre si el punto a considerar en vez de pertenecer a la circunferencia rodante estuviera localizado en el interior o exterior del círculo?

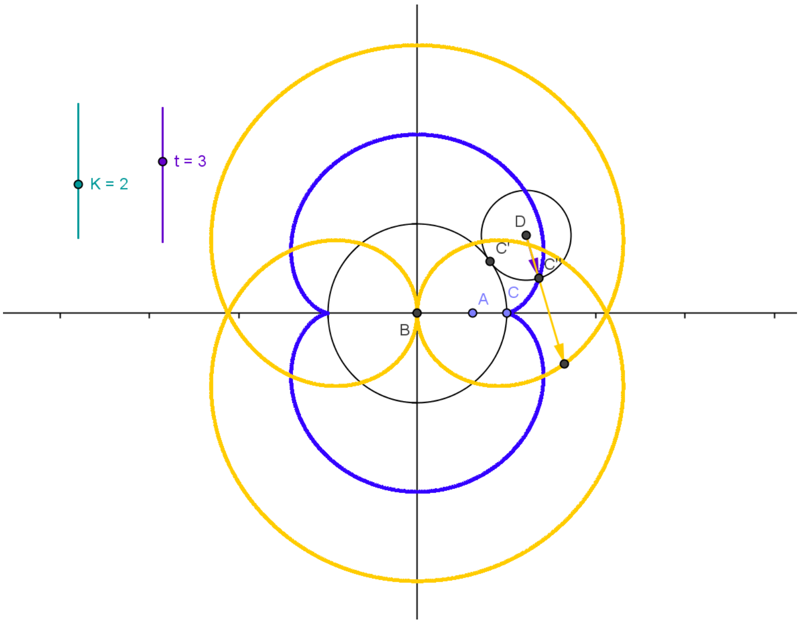
El estudio de estas nuevas situaciones se facilita mediante la introducción de un nuevo deslizador, ‘t’, que sirva para denotar la distancia del centro de la circunferencia rodante al punto que genera la curva. Si t es mayor que 1 el punto se encuentra en el exterior del círculo, si t es menor que 1 estará en el interior y si t es 1 el punto pertenece a la circunferencia y la curva generada será la epicicloide. Al arrastrar el punto asociado al deslizador podrán observarse los cambios que se producen en el aspecto de la curva.

Las curvas así generadas se llaman epitrocoides.

En la figura inferior puede observarse en un ejemplo dos lugares geométricos, el de color azul corresponde a una epicicloide y el de color marrón claro a una epitrocoide.

REVISTA DIGITAL INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

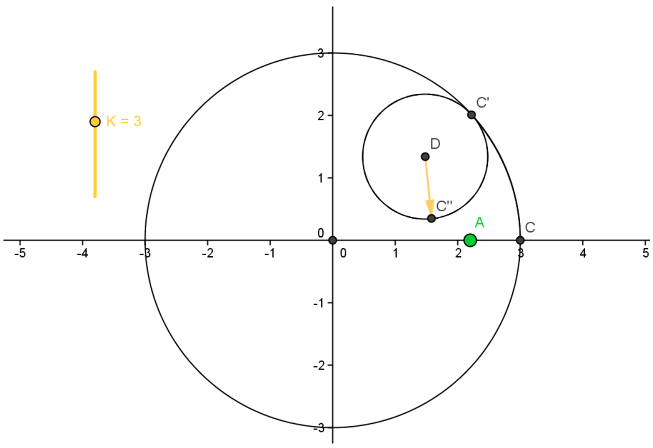
ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 23 – OCTUBRE DE 2009



5. HIPOCICLOIDES E HIPOTROCOIDES

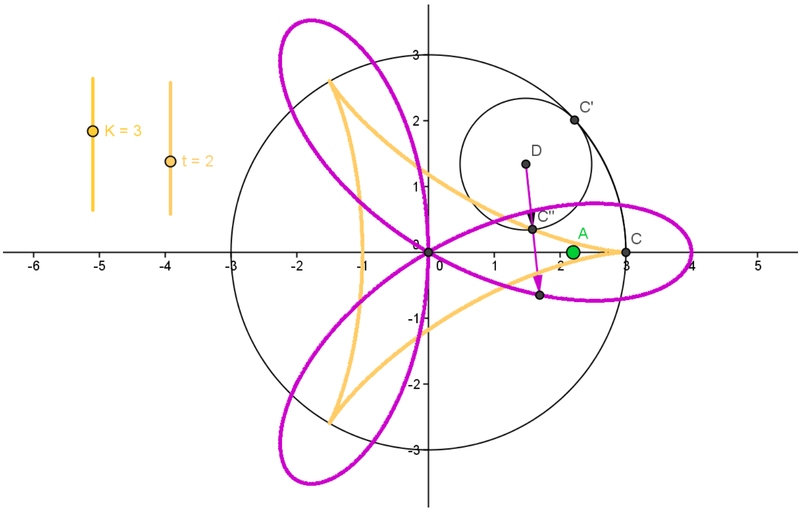
Cuando en las mismas condiciones anteriores la circunferencia rueda por la parte de dentro se generan unas nuevas ruletas llamadas hipocicloides e hipotrocoides.

Las únicas diferencias con el proceso constructivo de las epicicloides residen en los puntos 6 y 7. En la epicicloide se decía "*El centro D la circunferencia rodante se encuentra en la semirrecta de origen B que pasa por C' y a distancia 1 de C' por la parte de fuera*", en la hipocicloide deben cambiarse las últimas palabras para decir "*por la parte de dentro*". Y en segundo lugar, donde se decía en la epicicloide que el punto C'' se obtenía a partir del punto C' por rotación de ángulo s, en la hipocicloide debería decir ángulo –s, o en sentido horario.



REVISTA DIGITAL INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

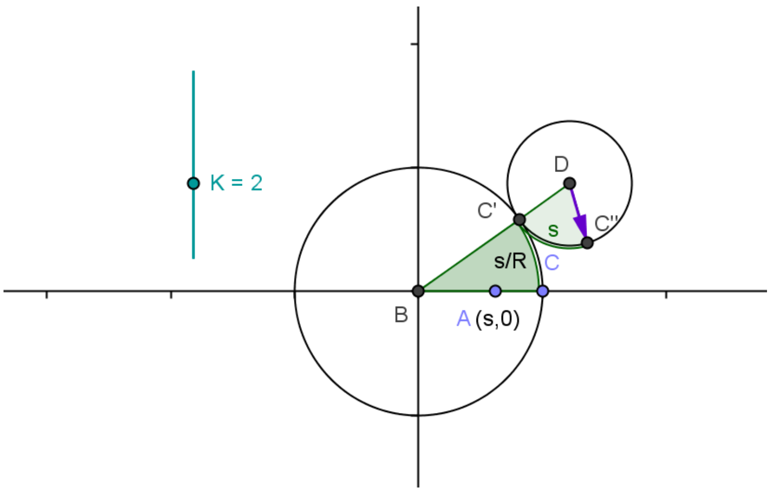
ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 23 – OCTUBRE DE 2009



Ejemplos de una hipocicloide, la deltoide, y una hipotrocoide basada en ella

5. ECUACIONES CARTESIANAS

En el sistema de referencia cartesiano adoptado en los gráficos que figuran en el presente trabajo es fácil obtener las coordenadas de los puntos que intervienen en la construcción de las diferentes curvas:



1. $C'\left(R\cos\frac{s}{R}, R\operatorname{sen}\frac{s}{R}\right)$

2. $D\left((R+1)\cos\frac{s}{R}, (R+1)\operatorname{sen}\frac{s}{R}\right)$

INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS
REVISTA DIGITAL

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 23 – OCTUBRE DE 2009

3. $C''\left(-\cos\left(\frac{s}{R}+s\right),-\operatorname{sen}\left(\frac{s}{R}+s\right)\right)$ si se toman referidas a D.

4. $C''\left((R+1)\cos\frac{s}{R}-\cos\left(\frac{s}{R}+s\right),(R+1)\operatorname{sen}\frac{s}{R}-\operatorname{sen}\left(\frac{s}{R}+s\right)\right)$ referidas al origen del sistema.

La ecuación cartesiana de la epicicloide es, pues,

$$\begin{cases} x=(R+1)\cos\frac{s}{R}-\cos\left(\frac{s}{R}+s\right)=(R+1)\cos s-\cos(R+1)s \\ y=(R+1)\operatorname{sen}\frac{s}{R}-\operatorname{sen}\left(\frac{s}{R}+s\right)=(R+1)\operatorname{sen} s-\operatorname{sen}(R+1)s \end{cases}$$

Las epitrocoides contienen un nuevo parámetro:

$$\begin{cases} x=(R+1)\cos\frac{s}{R}-t\cos\left(\frac{s}{R}+s\right)=(R+1)\cos s-t\cos(R+1)s \\ y=(R+1)\operatorname{sen}\frac{s}{R}-t\operatorname{sen}\left(\frac{s}{R}+s\right)=(R+1)\operatorname{sen} s-t\operatorname{sen}(R+1)s \end{cases}$$

Las ecuaciones cartesianas de las hipocicloides son de acuerdo con la forma de construirlas:

$$\begin{cases} x=(R-1)\cos\frac{s}{R}-\cos\left(\frac{s}{R}-s\right)=(R-1)\cos s-\cos(R-1)s \\ y=(R-1)\operatorname{sen}\frac{s}{R}-\operatorname{sen}\left(\frac{s}{R}-s\right)=(R-1)\operatorname{sen} s+\operatorname{sen}(R-1)s \end{cases}$$

Y las de las hipotrocoides

$$\begin{cases} x=(R-1)\cos\frac{s}{R}-t\cos\left(\frac{s}{R}-s\right)=(R-1)\cos s-t\cos(R-1)s \\ y=(R-1)\operatorname{sen}\frac{s}{R}-t\operatorname{sen}\left(\frac{s}{R}-s\right)=(R-1)\operatorname{sen} s+t\operatorname{sen}(R-1)s \end{cases}$$

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 23 – OCTUBRE DE 2009

6. BIBLIOGRAFÍA

Artículos

1. http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/archivos1/doctorado/Homenaje/19Gonzalez-LopezMJ.PDF donde se analiza la gestión de la clase utilizando programas de geometría interactiva.
2. http://www.tesisenxarxa.net/TESIS_UPC/AVAILABLE/TDX-0103105-131245//06Pjgm06de13.pdf donde se analizan en general la ruletas desde un punto de vista artístico.
3. http://es.wikipedia.org/wiki/Hipocicloide
4. http://es.wikipedia.org/wiki/Hipocicloide

Páginas sobre Geogebra

- http://www.geogebra.org/cms/
- http://recursos.pnte.cfnavarra.es/~msadaall/geogebra/index.htm
- http://geometriadinamica.es/
- http://www.geometriadinamica.cl/
- http://jmora7.com/Arte/arte.htm
- http://roble.cnice.mecd.es/jarran2/
- http://www.iespravia.com/rafa/rafa_geogebra.htm
- http://www.xente.mundo-r.com/ilarrosa/GeoGebra/

Páginas sobre curvas en general

- http://mathworld.wolfram.com/topics/Curves.html
- http://www.gap-system.org/~history/Curves/Curves.html
- http://www.mathcurve.com/courbes2d/courbes2dsp.shtml

Autoría

- Nombre y Apellidos: Patricia Pérez Ortiz
- Centro, localidad, provincia: IES Torreblanca, Sevilla, Sevilla
- E-mail: patruki957@yahoo.es