REVISTA DIGITAL INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 24 NOVIEMBRE 2009

"EL NÚMERO DE ORO. PROPUESTAS PARA EL AULA."

AUTORÍA **TOMÁS DAVID PÁEZ GUTIÉRREZ**
TEMÁTICA **MATEMÁTICAS**
ETAPA **ESO, BACHILLERATO**

Resumen

La importancia del número de oro debido a su constante presencia en nuestro entorno es enorme. En este artículo se realiza una presentación histórica y matemática de dicho número y se realizan una serie de propuestas de actividades para el aula con las que trabajar dichos contenidos con nuestro alumnado.

Palabras clave

Número de oro

Divina proporción

Sección áurea

Actividades

1. INTRODUCCIÓN

Las proporciones, y en particular, la sección áurea, constituyen uno de los temas que hacen más patente la conexión de las Matemáticas con la realidad que nos rodea y su relación con otras disciplinas.

La sección áurea surge al intentar dividir un segmento asimétricamente de la forma más directa y sencilla posible, de acuerdo con el principio del mínimo esfuerzo o principio de economía. La razón obtenida, sagrada para los griegos, fue llamada "Divina Proporción" por Fray Luca Pacioli, y "Sección Áurea" por Leonardo da Vinci.

Es interesante comentar el significado e importancia del número de oro a lo largo de la historia. El descubrimiento empírico del número de oro se remonta a la antigüedad más lejana, probablemente a

REVISTA DIGITAL INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 24 NOVIEMBRE 2009

épocas prehistóricas. El conocimiento de las propiedades de este número, enriquecido de elementos nuevos en el transcurso del tiempo, no ha sufrido interrupción hasta nuestra época.

Se supone que el número de oro era conocido antes de los griegos porque aparecen figuras geométricas relacionadas con él en algunos monumentos y obras de arte anteriores a la civilización helénica (especialmente en el antiguo Egipto). Pero aunque se conocieran algunas de sus propiedades geométricas de forma experimental, fueron los griegos los primeros que dieron rigor matemático a la noción de número de oro. Aparece en el “Timeo” de Platón y en “Los Elementos” de Euclides. Este último tratado recoge lo esencial de las propiedades geométricas del número de oro.

En la Edad Media cabe destacar las contribuciones realizadas por el matemático italiano Leonardo de Pisa, llamado también Fibonacci(1180-1250), a quien se atribuye la sucesión que lleva su nombre, muy relacionada con el número de oro.

Pero quizás la obra más significativa sobre el tema llega en el Renacimiento con la publicación de “La Divina Proporción” de Luca Pacioli. Fue publicada en Venecia en 1509, y tuvo el privilegio de ser ilustrada por Leonardo da Vinci. Está basada en gran parte en el “Timeo” de Platón, en “Los Elementos” de Euclides y en la obra de Vitrubio, el único tratado antiguo de arquitectura que ha llegado hasta nosotros. Parece que “La Divina Proporción” fue el primer tratado consagrado en gran parte al número de oro, considerando sus propiedades matemáticas y sus atributos estéticos, sin olvidar ciertos aspectos místicos.

Hay que decir que desde la antigüedad se atribuía un sentido místico al número. Para los pitagóricos, los números están detrás de la naturaleza; todo está dispuesto conforme al número. Se sabe que su emblema secreto era el pentagrama, o pentágono estrellado, símbolo de la vida y de la salud y que está muy relacionado con el número de oro. La simbología pitagórica tuvo una gran influencia a lo largo de los siglos. Se entiende así que Luca Pacioli utilizara el nombre de “divina proporción” pues le atribuía propiedades divinas.

Para Leonardo da Vinci, y para la mayor parte de los artistas y sabios del Renacimiento, la sección áurea produce una impresión de armonía lineal, de equilibrio en la desigualdad, más satisfactoria que cualquier otra combinación.

La sección áurea cayó después en el olvido por espacio de más de dos siglos y fue el alemán Zeysing, quien, hacia 1850 volvió a descubrirla, convirtiéndola en pieza clave en las especulaciones artísticas y estéticas.

Por último decir que el estudio histórico del número de oro está todavía en sus comienzos y presenta múltiples aspectos inciertos o desconocidos. Por ejemplo, no se sabe con certeza desde cuando se emplea la expresión “número de oro”. Otro calificativo que se le ha dado a la “divina proporción” de Pacioli o “sección áurea” de Leonardo da Vinci, es el de “joya de la geometría”, por el astrónomo Kepler.

REVISTA DIGITAL INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 24 NOVIEMBRE 2009

2. LA DIVINA PROPORCIÓN, EL NÚMERO DE ORO, LA SECCIÓN ÁUREA

La partición desigual más sencilla de una magnitud en dos partes, que se obtiene aplicando el Principio de Economía, era la que establecía entre la magnitud inicial y sus dos partes la proporción llamada media y extrema razón o sección áurea.

Si estas dos partes son a y b, se tiene $\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}$, de donde $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=1{,}61803398...$

La razón $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ se encuentra en las figuras geométricas derivadas del pentágono regular. Desde 1900, esta razón se representa por la letra griega φ o Φ (fi)en honor a Fidias, escultor griego que usó esta proporción en sus obras escultóricas, siendo en los anexos del libro "Las curvas de la vida" de Sir Theodore Cook donde dicha notación aparece por primera vez.

Mediante la sección áurea, cuya construcción ha sido divulgada desde Euclides, Ptolomeo resolvió en su Almageste los problemas gráficos de encontrar los lados del pentágono y del decágono regulares inscritos en un círculo dado.

Al ser el pentagrama la contraseña secreta de los Pitagóricos, las construcciones y proporciones de éste han permanecido ocultas con el tiempo. Hipócrates de Chíos fue castigado con la expulsión solemne de la secta de los Pitagóricos por la divulgación de un secreto geométrico en relación con las proporciones irracionales y la invención de un método especial para la construcción de un pentágono regular de lado dado, basado en la sección áurea.

La proporción divina se encuentra tanto en los cuerpos regulares, como en los que dependen de ellos. La sección áurea aparece en el arte griego (pintura, escultura, arquitectura, ...), en la constitución humana, en las plantas, en las matemáticas, en los animales, en la cosmología, ...

Por último, para destacar la importancia del número de oro, en la obra "Mysterium Cosmographium de abmirabili proportiene orbium caelestium" publicada en 1596, Kepler califica a la Divina Proporción o Sección Aurea como una de las joyas de la geometría junto con el Teorema de Pitágoras. Luego fue completamente olvidada, hasta ser redescubierta y puesta de relieve como principio morfológico directivo por el alemán Zeysing a mediados del siglo XIX.

3. ASPECTO ARITMÉTICO Y ALGEBRAICO DEL NÚMERO DE ORO

El número de oro, Φ = $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, es un número irracional pero algebraico, puesto que se obtiene como solución de la ecuación algebraica $x^2-x-1=0$. Este número posee curiosas e importantes propiedades de las cuales destacaremos algunas a continuación.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 24 NOVIEMBRE 2009

3.1. La progresión Φ

El número de oro es el único número positivo que verifica $\phi^2=\phi+1$, por ser solución de la ecuación algebraica $x^2 - x - 1 = 0$. Es decir, al sumarle una unidad, se obtiene su cuadrado. Análogamente, dividiendo por ϕ se tiene $\frac{1}{\phi} = \phi - 1$, o sea, al disminuirlo en una unidad se obtiene su inverso:

$$\phi = 1.618033...$$

$$\phi^2 = 2.618033...$$

$$\frac{1}{\phi} = 0,618033...$$

Observamos que estas tres expresiones tienen los mismos decimales. También hay que notar que $\frac{1}{\phi}$ es justamente el opuesto de la raíz negativa de la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$, y algunos autores consideran a $\frac{1}{\phi}$ como el nº de oro.

Multiplicando por ϕ sucesivamente, se obtiene que:

$$\phi^3 = \phi^2 + \phi$$

$$\phi^4 = \phi^3 + \phi^2$$

....

$$\phi^n = \phi^{n-1} + \phi^{n-2}$$

Esto nos dice que en la progresión geométrica de razón ϕ: 1, ϕ, ϕ^2,..., todo término es igual a la suma de los dos anteriores, siendo ésta es la única progresión geométrica que lo verifica.

3.2. La sucesión de Fibonacci

El origen de esta sucesión es el estudio de la evolución de las poblaciones de conejos. En su creación, Fibonacci supuso que los conejos vivían para siempre y que cada mes una pareja procreaba una nueva pareja que vuelve a ser productiva a la edad de dos meses. En el primer mes, el experimento comienza con una pareja de recién nacidos. En el segundo mes, todavía hay una sola pareja. En el tercer mes, hay dos; en el cuarto, 3; en el quinto, 5; y así sucesivamente. Sea f_n el número de parejas de conejos en el enésimo mes. Los primeros valores los podemos tabular de la siguiente manera:

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 24 NOVIEMBRE 2009

n :	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_n :	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Se observa que cada término es la suma de los dos anteriores, es decir, $f_n= f_n-1 + f_n-2$.

Ésta es la denominada sucesión de Fibonacci. ¿Qué relación tiene con el nº de oro? Pues, que al dividir dos términos consecutivos de la sucesión, el cociente tiende a ϕ:

$$\frac{f_{n+1}}{f_n}: \ \infty \ \ 1 \ \ 2 \ \ 1.5 \ \ 1.6 \ \ 1.6 \ \ 1.625 \ \ 1.6154 \ \ 1.6190 \ \ 1.6176$$

En general $\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n} = \phi$.

Para valores muy grandes de n, se tiene que $\frac{f_n}{f_{n-1}} = \frac{f_{n+1}}{f_n}$, entonces al sustituir $f_{n+1}=f_n+f_{n-1}$, se tiene que:

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} = \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{(f_1 + f_{n-1})}{f_n} = 1 + \frac{f_{n-1}}{f_n} = 1 + \frac{1}{\frac{f_n}{f_{n-1}}}$$ y llamando $\frac{f_n}{f_{n-1}} = x$, obtenemos que:

$$x = 1 + \frac{1}{x}; \qquad x^2 - x - 1 = 0; \qquad x = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \Phi$$

Luego $\lim_{n\to\infty}\frac{f_n}{f_{n-1}} = \phi$.

3.3. Otras expresiones de Φ

a) Cinco siglos después, se reconoció $\frac{f_n}{f_{n-1}}$ como el enésimo convergente de la fracción continua

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}$$

Los convergentes son los números 1, 1+1 = 2, $1+\frac{1}{1+1}=\frac{3}{2}$, $1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}=\frac{5}{3}$, y los que se suceden de la misma manera, y cuyo término general es el cociente de dos términos sucesivos de la sucesión de Fibonaci, en la que vimos que $\lim_{n\to\infty}\frac{f_n}{f_{n-1}}=\phi$.

b) $\phi=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}}$

Supongamos que el límite de $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}}$ existe y es finito. Llamemos x a dicho límite.

Elevando ambos miembros al cuadrado se tiene que:

$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}} = x^2 \Rightarrow \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}} = x^2-1$, o sea, $x = x^2-1$.

Resolviendo esta ecuación, nos da la solución positiva, $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \Phi$, y se tiene lo que queríamos.

4. PROPUESTAS PARA EL AULA

A continuación se muestra una pequeña colección de actividades con las que se pretende ejemplificar la utilidad y aplicabilidad de los contenidos aprendidos acerca del número de oro en el aula. Además, algunas de ellas, pueden realizarse en colaboración con otros Departamentos Didácticos distintos al de Matemáticas poniendo así de relieve la aplicabilidad del concepto en otras materias.

4.1. Actividad 1

Construir rectángulos áureos, ortoedros áureos y otros cuerpos empleando diversos materiales.

(Esta actividad puede ser llevada a cabo en el Taller de Tecnología)

4.2. Actividad 2

a) Coge un billete de 5 € y mide sus dimensiones.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 24 NOVIEMBRE 2009

b) Calcula la razón entre su longitud y su ancho.

c) Las dimensiones del billete ¿están en proporción áurea?

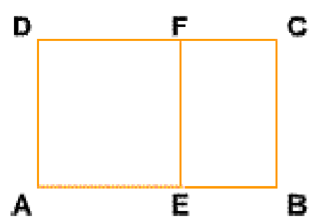
d) Elige otros billetes de valores diferentes e investiga la relación entre sus dimensiones.

4.3. Actividad 3

Ayudándote de tu calculadora, calcula, con 4 decimales, el valor del número áureo $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

4.4. Actividad 4

Demuestra que si el rectángulo ABCD siguiente es áureo, entonces también lo es el EBCF.



4.5. Actividad 5

Comprueba que al dividir el ancho de tu DNI entre su alto, obtienes aproximadamente, el número áureo.

4.6. Actividad 6

Encuentra al menos tres objetos rectangulares de tu entorno cotidiano cuyas dimensiones guarden una proporción áurea.

4.7. Actividad 7

a) Resuelve las ecuaciones $x^2 = x+1$ y $x^2 = -x+1$.

b) Comprueba que las cuatro soluciones que se obtienen coinciden con los valores de: ϕ, $-\phi$, $\frac{1}{\phi}$, $-\frac{1}{\phi}$.

(Nota: ϕ es el número de oro)

4.8. Actividad 8

Dividamos un segmento AB en proporción áurea. Es decir, vamos a encontrar un punto C tal que $\frac{AB}{AC}$ sea igual al número de oro. Para ello, sigue los siguientes pasos:

a) Traza un segmento AB y su punto medio M.

b) Dibuja una circunferencia de radio BM.

c) Levanta en B la perpendicular al segmento y encuentra el punto D (intersección de la perpendicular con la circunferencia anterior).

d) Con centro en D, dibuja una circunferencia de radio DB.

e) Dibuja el segmento AD y encuentra el punto E (intersección de la anterior circunferencia con AD).

f) Con centro en A y radio AE, dibuja una circunferencia. El punto C buscado es el corte de esta circunferencia con el segmento AB.

4.9. Actividad 9

Vamos a construir un rectángulo áureo a partir de un cuadrado, siguiendo un procedimiento similar al seguido por Teano y otros miembros de la escuela Pitagórica. Para ello realiza los siguientes pasos:

a) Dibuja un cuadrado ADGR (en el sentido de las agujas del reloj) de lado AR.

b) Halla el punto medio de AR y llámale M.

c) Con centro en el punto M dibuja la semicircunferencia que pasa por D y halla el punto B (intersección de dicha semicircunferencia con la prolongación de AR).

d) Levanta en B una perpendicular a AB y busca el punto de corte de esa perpendicular con la prolongación del lado del cuadrado opuesto a AR (es decir, DG).

e) Traza el rectángulo ABCD y comprueba que es un rectángulo áureo.

(Nota histórica: Teano fue una matemática griega nacida en Crotona en el siglo VI a. C.. Formó parte de la escuela pitagórica. La comunidad pitagórica llegó a tener tanto poder en Crotona que la población se rebeló contra ella. Parece ser que Pitágoras perdió la vida durante la revuelta y Teano, su esposa, pasó

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 24 NOVIEMBRE 2009

a dirigir la escuela en el exilio. Según los historiadores, Teano escribió mucho y se le atribuyen tratados de Matemáticas, Cosmología, Medicina y numerosos estudios sobre el número áureo. Teano, como el resto de los pitagóricos pensaba que el Universo estaba regido por el Número, ya que en él reside el orden esencial. Sólo admitían la existencia de los números naturales. Para Teano el número era la esencia del Universo. Todo esto junto con su búsqueda de la perfección y de la armonía en las formas y las proporciones la llevó a trabajar en el número áureo).

5. BIBLIOGRAFÍA

- Ghyka, Matila (1978). *El número de oro: ritos y ritmos pitagóricos en el desarrollo de la civilización occidental*. Barcelona: Poseidón.
- Pacioli, Luca (1991). *La divina proporción*. Madrid: Akal.
- Departamento de Matemáticas IES María Moliner (2009). Actividades matemáticas. Extraído el 10 de octubre de 2009 desde http://www.iessandoval.net/sandoval/aplica/activi_mate/index.html.
- CEPA Carmen Conde Abellán (2009). La razón áurea. Extraído el 09 de octubre de 2009 desde http://joseramoncj.files.wordpress.com/2009/03/trabajo-i-para-2c2ba-de-espa.pdf.
- Junta de Andalucía (2009). El número de oro. Extraído el 07 de octubre de 2009 desde http://www.juntadeandalucia.es/averroes/recursos_informaticos/concurso2002/alumnado/index.html.

Autoría

- Nombre y Apellidos: Tomás David Páez Gutiérrez
- Centro, localidad, provincia: IES Vera Cruz, Begíjar, Jaén
- E-mail: tomasp@terra.es