



ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 25 – DICIEMBRE DE 2009

“PUZZLES Y JUEGOS TOPOLÓGICOS”

AUTORÍA BLANCA FERNÁNDEZ PÉREZ
TEMÁTICA MATERIALES PARA EL AULA DE MATEMÁTICAS
ETAPA EP, ESO

Resumen

Muchos profesores de matemáticas y matemáticos insisten en la utilización en el aula de puzzles y juegos topológicos por sus beneficios y aplicaciones didácticas. Pero, ¿conocemos su utilidad y aplicaciones en el aula? El siguiente artículo relaciona el juego con las matemáticas y analiza brevemente las utilidades del puzzle de estrella y juegos topológicos, así como proponer una serie de actividades.

Palabras clave

Matemáticas, puzzle, juegos, topología, alambre, cuerda.

1. INTRODUCCIÓN

“El secreto de un comportamiento flexible está en tener experiencias interesantes en condiciones estables que estén tan libres de serio peligro como sea posible. El juego, que es la actividad normal de niños que se sienten a cubierto, es un síntoma de versatilidad que tiende a crear más versatilidad.

El juego es, en cierta medida, una actividad simbólica. Sus reglas pueden romperse, o nuevas reglas pueden inventarse, sin que ello tenga graves consecuencias. (...) En el juego se puede llegar a extremos, ser osado, experimentar, de manera que los límites de lo permisible y de lo práctico pueden ser explorados hasta el fondo”

Jeremy Campbell¹

Pretendo con el siguiente artículo establecer la relación juego-matemáticas, y para este propósito las observaciones de Jeremy Campbell me parecen de una gran profundidad.

De entre todos los tipos de juegos, solamente uno centrará, pues nuestra atención: aquel tipo en el que para poder jugar haya que utilizar conocimientos matemáticos siendo o no consciente de ello, siendo estimulante y divertido para nuestros alumnos.

¹ Campbell, J. (1984) *Grammatical Man*, Pelican Books, Londres

2. JUEGOS TOPOLÓGICOS

Los juegos topológicos de alambres o cuerdas son considerados juegos de ingenio, pero “analizar juego topológicos” tiene en común con “hacer matemáticas” varias cosas: buscar criterios de equivalencia, estudiar condiciones de solución y unicidad, clasificarlos, variantes interesantes topológicamente...

Son de interés educativo los juegos topológicos. Pues, favorecen la visualización (desarrollando la visión espacial, especialmente topológica), ejercitan la resolución de problemas geométricos (simplificar, buscar semejantes, estudiar posibilidades de datos, identificar incógnitas/pieza problema, partir de resuelto, etc.), incluso la resolución de problemas en general (analizar el problema, ver posibles soluciones, actuar y comprobar la solución...)

Podemos introducir en clase con el fin de:

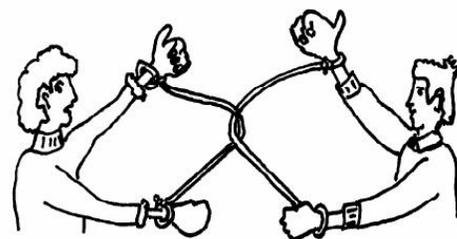
- Plantear retos en momentos lúdicos
- Promover visión espacial con ejemplos sencillos
- Mostrar otros campos de la matemática
- Relacionar con su representación y problemas planos de huecos

2.1. Descripción:

2.1.1. Juegos de cuerdas

Dentro de los juegos de cuerdas, podemos encontrar en el mercado una gran diversidad de puzzles topológicos. Principalmente se componen, todos ellos, de cuerdas, anillas y tablas de madera. Pueden consistir en sacar anillas o bolas de cuerdas enlazadas, de pasarlas a través de la tabla de madera, etc; como hemos dicho, hay una gran variedad. Incluso nuestros alumnos pueden construirlos en el taller de matemáticas o con la colaboración del departamento de tecnología.

Estos juegos pueden causar más atención en nuestros alumnos, si son ellos mismos las piezas que componen el juego; pues se siente más implicados en el juego y se produce un gran ambiente en el aula. Por ejemplo, el juego de la imagen que podemos encontrar a la entrada en el Parque de las Ciencias de Granada. (Otros juegos de cuerdas también se pueden encontrar allí o en la zona exterior junto a la Banda de Moebius.)



2.1.2. Juegos de alambres

Yo y muchos matemáticos somos aficionados a los juegos de ingenio por el desarrollo de visión espacial que hemos visto que hemos adquirido con el juego. Desde que recuerdo, en las conferencias de Thales siempre han regalado juegos topológicos y es que quizás somos muchos los que queremos convencer a los profesores de su interés matemático y educativo. Pero no es fácil, ya que existe la dificultad de demostrar proximidad entre Matemáticas y algunos juegos, aunque la relación con la topología no es evidente. Al considerar los puzzles de alambre como topológicos se quiere decir que para solucionarlos hay que tener en cuenta aspectos como la diferencia entre abierto y cerrado, dentro y fuera, etc.

Los juegos de alambre son juguetes muy antiguos, que evidentemente ayudan a los que los utilizan a desarrollar estrategias para resolver situaciones cotidianas relacionadas con extraer o meter objetos dentro de otros, amarrar objetos, etc. Caben dentro de lo que llamamos “juegos de ingenio”, ya que su solución no es evidente, y si alguna vez lo resolvemos sin pensar no resulta fácil volverlo a la posición original. Por tanto su interés para desarrollar destrezas nadie lo niega, lo que se hace necesario es analizar los juegos para ver de qué tipo son estas destrezas.

2.2. Nociones Matemáticas que se pueden aprender-enseñar en el aula:

- Identificación y nombre de todas las piezas de juegos topológicos de cuerda:

- Muñecas, esta función también la tienen las bolas de madera de los distintos juegos.
- Los brazos y las cuerdas del juego de manos enlazadas en los demás juegos pueden ser las cuerdas y la madera donde esta metida las cuerdas.
- Los aros pueden ser para despistar, como en este caso, o también cuerda cerrada.



- Identificación y nombre de todas las piezas de juegos topológicos de alambre:



Figura 1



Figura 2

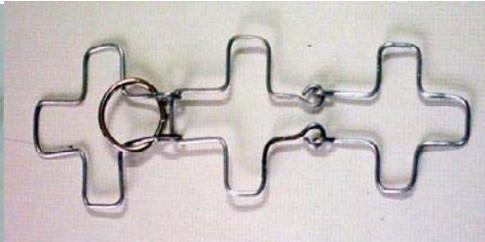


Figura 3

- Podemos encontrar piezas abiertas, como se observa en la figura 2, y cerradas, como en la figura 1 y 3.

Conceptos matemáticos que se han trabajado:

- Visión espacial
- Giros y movimientos
- Simetrías
- Identificación de figuras abiertas y cerradas
- Diferencia entre anillos enlazados
- Teoría de nudos
- Diferenciar cuando las figuras están enlazadas o abrazadas
- Continuidad



ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 25 – DICIEMBRE DE 2009

2.3. Actividad donde se emplea el material

- 1.- Diferenciar las distintas piezas de los juegos.
- 2.- Resolver los distintos juegos que se propongan.
- 3.- Realizar el paso contrario al del ejercicio 2, es decir dejar el juego como nos lo encontramos.
- 4.- Identificación de las distintas piezas de los juegos y relacionar las piezas de unos con otros.
- 5.- Construir nuevos juegos.

2.4. Valoración personal: Ventajas e inconvenientes:

Ventajas:

- Desarrollo de la visión espacial
- Destreza manual
- Entretenimiento
- Fácil manejo y construcción
- Distintos niveles de dificultad
- Se pone a prueba la visión espacial y se incrementa practicándola
- Motivación del alumno cuando se ve implicado en el problema

Inconvenientes:

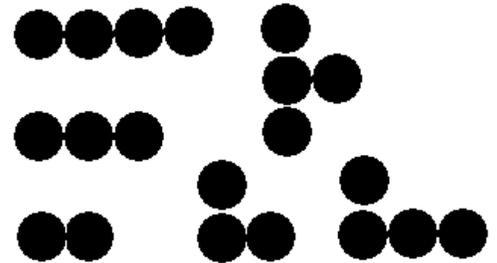
- Sino sale produce rechazo
- Puede producir aburrimiento cuando no salen
- Poco versátiles
- Se pueden romper con su mal uso al hacer trampas

Creo, por tanto que es conveniente aportar puzzles de alambre a actividades de divulgación matemática, así como proponer a nuestros alumnos que los practiquen, ya que el jugar con ellos desarrolla el dominio de algunas características topológicas de los cuerpos (tanto de los puzzles como de otras situaciones cotidianas). Ahora bien, conviene completar estos trabajos lúdicos con lecturas de divulgación matemática sobre lo que es la Topología y la relación que tiene con los puzzles, para lo cual debemos los profesores hacer un esfuerzo extra para hacer más obvia la implicación de la topología en la vida cotidiana de nuestros alumnos, en general, y en los puzzles de alambre, cuerdas y maderas, en particular.

3. PUZZLE DE LA PIRÁMIDE O PIRÁMIDE DE KEOPS.

3.1. Descripción:

El puzzle de la Pirámide consta de diferentes figuras en tres dimensiones hechas de madera. Consta de 4 zuecos, 4 picos, 4 tejados y 3 pirámides cuadrangulares. También tiene su versión con bolas con las figuras que vemos en la imagen:



3.2. Temas y nociones matemáticas que se pueden aprender/enseñar con él:

- Desarrolla la visión espacial.
- Semejanza.
- Proporcionalidad.
- Volúmenes.
- Regularidad.

3.3. Actividades con el material:

- Construir un tetraedro usando dos picos.
- Construir una pirámide de base cuadrada con todas las piezas del puzzle.
- Construir un zueco, un pico, un tejado y una pirámide utilizando varias piezas del puzzle.
- Construir todos los poliedros regulares posibles.
- Construir una pirámide de lado doble y calcular su volumen.
- Obtener sólidos semejantes y determinar la razón de semejanza.
- Calcular el volumen de cada figura.
- Crea nuevas figuras a partir de las dadas.

3.4. Valoración personal:

- Ventajas:

- Versátil
- Fácil de manejar.
- Nos ayuda, de una forma clara, a entender la proporcionalidad, sobre todo entre lados y volúmenes.
- Visión espacial.
- Nos ayuda a comprender y memorizar conceptos.
- Desarrolla estrategias en pre y post-instrucción, es decir, sirve para introducir el concepto de proporcionalidad y repasar algunos temas como volúmenes y regularidad.

- Inconvenientes:

- Difícil construcción.
- No es fácil encontrarlo en el mercado.
- Pocos conceptos que aprender.

- Uso en el aula:

Es un material interesante que nos permite introducir algunos conceptos nuevos, pero considero que hay otros materiales mejores que éste con los que se pueden aplicar más conceptos y nos ofrecen una mayor variedad.

4. PUZZLE DE LA ESTRELLA

En casa, de pequeña, tenía este puzzle y fue una sorpresa el estudiarlo matemáticamente en el aula, pues tiene un gran interés didáctico para la enseñanza de las matemáticas, o al menos para favorecer de manera lúdica el desarrollo del sentido espacial. Además, desde una situación manipulativa se pueden enseñar los irracionales cuadráticos, que en este caso aparecen ligados a longitudes y áreas. El puzzle puede emplearse también para el estudio de regularidades, como las combinaciones de colores (con los correspondientes estudios de frontera, equivalencia de formas, ideas combinatorias, etc.), las simetrías, las teselaciones, los frisos, etc., todo ello de una forma manipulativa, y encaminado a resolver un problema lúdico fácilmente comprensible: colocar adecuadamente las piezas en su caja.

4.1. Descripción:

El puzzle de la estrella consiste en un cuadrado dividido en piezas de tres formas: cuadrados, triángulos rectángulos isósceles cuyos catetos son iguales al lado del cuadrado (medios cuadrados), y rombos de ángulos de 45° y lados iguales al cuadrado. En total hay 36 piezas: 16 rombos, 4 cuadrados y 16 triángulos (aunque podrían dividirse los cuadrados en triángulos sin que cambiase la estructura geométrica, pasando a tener 40 piezas).



4.2. Nociones matemáticas:

Para presentar el puzzle hemos descrito sus piezas. Vamos a partir del puzzle descompuesto en piezas para proponer actividades de enseñanza que permitan trabajar la forma, la percepción de figuras en un entramado, la relación entre medidas (de longitudes y superficies), la comparación de cantidades de las magnitudes señaladas, y, como consecuencia de todo ello, algunos irracionales cuadráticos.

- *Identificación y nombre de todas las piezas:*

1. Cuadrado → El cuadrado es un polígono de cuatro lados, con la particularidad de que todos ellos son iguales. Además sus cuatro ángulos son de 90 grados cada uno.
2. Triángulo → El triángulo es un polígono formado por tres lados y tres ángulos. La suma de todos sus ángulos siempre es 180 grados.
3. Romboide → Cuadrilátero con los lados paralelos dos a dos (es por tanto un paralelogramo) y en la que los lados paralelos tienen la misma longitud.
4. Polígono → Un polígono es una figura geométrica plana limitada por segmentos rectos (o curvos) consecutivos no alineados, llamados lados. La palabra "polígono" procede del griego y quiere decir *muchos* (*poly*) y *ángulos* (*gwnos*). Los polígonos cuyos lados tienen la misma longitud y todos sus ángulos son iguales son llamados *polígonos regulares*.

Áreas → tomamos como unidad el área del cuadrado. El área del triángulo es $\frac{1}{2}$ del cuadrado. Romboide = $(\frac{1}{2})^{1/2}$. La altura del rombo es igual que la altura del triángulo y el cuadrado es el doble del triángulo.

- Cogiendo una unidad de referencia, en nuestro caso el cuadrado pequeño, vamos a ir *relacionando todas las piezas*, es decir el *área* de ellas:

El área del paralelogramo: base * altura = $(2)^{1/2} / 2 * 1 = 2^{1/2} / 2$

El área del rombo es más grande que la del triángulo.

El área de dos triángulos es mayor que la del rombo.

El área de los dos triángulos es $1/2 + 1/2 = 1$. Y el área del rombo está entre $1/2$ y 1.



- ¿Qué polígonos regulares se pueden construir?

Se puede construir el cuadrado, octógono...

El hexágono no se puede porque tenemos ángulos de 135° , 45° , 90° y nunca podemos formar un ángulo de 120° con ellos.

El octógono por su parte sí se puede construir ya que su ángulo interior es de 45° y tenemos un ángulo de esa dimensión. También podemos formar todos los cuadrados posibles. Por ejemplo: Un cuadrado de área 4, otro de 9, 16...si el lado es de longitud 1 construimos un cuadrado de área 1, si es de longitud $2^{1/2}$ de área 2, si es de 2 entonces de 4 y si es de lado $1+2^{1/2}$ es de área $3+2*2^{1/2}$.

-¿Cuánto mide el puzzle?

$(2+2*2^{1/2})(2+2*2^{1/2})$

Conceptos matemáticos que hemos trabajado

- Inconmensurabilidad: La $2^{1/2}$ no es inconmesurable con 1 porque cualquier número multiplicado por $2^{1/2}$ no da 1 multiplicado por otro número.

- Área:

- Las figuras geométricas (polígonos regulares)

- Lados, ángulos

- Longitudes

- Simetrías

- Teorema de Pitágoras

- Números irracionales

- Perpendicularidad

- Posibilidad / Imposibilidad de formar figuras a partir de otras

- Formación de cuadrados

- Relaciones entre polígonos

- Racionalización

- Tiene como finalidad la enseñanza de la geometría a parte de la enseñanza de los números



ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 25 – DICIEMBRE DE 2009

4.3. Actividad donde se emplea el material:

- 1.- Construir con todas las piezas del puzzle una estrella.
- 2.- Construir con todas las piezas un cuadrado que se pueda introducir en la caja.
- 3.- Construir todos los cuadrados posibles, identificarlos (es decir, calcular el área) y relacionar unos con otros.
- 4.- Construir el cuadrado, introducirlo en la caja, buscar todas las soluciones posibles
- 5.- Estudiar las piezas: formas, tamaños, superficies.
- 6.- Identificar polígonos regulares que aparecen en las soluciones del puzzle. Como consecuencia, obtener todos los cuadrados que aparecen en el puzzle e identificar los que sean iguales aunque ocupen posiciones diferentes.
- 7.- Obtener todos los cuadrados de diferentes áreas que se pueden formar con las piezas del puzzle.
- 8.- Búsqueda de condiciones que deben verificar las piezas que se colocan en los lados de la caja, y en el interior, que permiten resolver el puzzle.

4.4. Valoración personal:

Ventajas:

- Reconocer figuras geométricas, recordar las fórmulas ya olvidadas.
- Desarrollo de la visión espacial
- Es divertido
- Desarrollo de fórmulas. Si se hace con fórmulas, se comprueba visualmente y del revés.
- Se obtiene la idea intuitiva de áreas

Inconveniente:

- No podemos perder tanto tiempo en una clase
- No es fácil poner las piezas en la caja
- Obtener la medida de un lado en función del otro.
- Obtener la superficie del rombo a partir del triángulo.
- Obtener el lado de la caja
- No es fácil para niños, no es un puzzle trivial habría que darle una silueta y ver como la forman con las piezas dadas.

“La ventaja de emplear este puzzle en la enseñanza es que nos permite afrontar de manera manipulativa una introducción al tratamiento de dos longitudes incomensurables, que se manejan de manera independiente, incluso en el trabajo empírico. El puzzle nos encamina hacia los irracionales cuadráticos de raíz de dos, dando sentido a las operaciones con estos irracionales, para ordenar las longitudes, las áreas, para buscar todas las soluciones y combinaciones posibles, y para estudiar las similitudes y diferencias de estas combinaciones, Y todo ello en un contenido, como la comensurabilidad y los irracionales, en el que es muy difícil encontrar materiales para su enseñanza, ya que se trata de un concepto abstracto, que exige que los alumnos trabajen con la medida abstracta, pues la medida empírica siempre será racional”

(Romero 1997)



ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 25 – DICIEMBRE DE 2009

5. BIBLIOGRAFÍA.

- [1] Morcote, O. y Flores, P. (2001). Algunos elementos del conocimiento profesional en la planificación de clase de futuros profesores de Secundaria. (Un caso: Las fracciones). *Encuentro de Matemáticos Andaluces*.
- [2] Deulofeu Piquet, J. *Juegos y recreaciones para la enseñanza de las matemáticas: Diversidad de opciones y de recursos*. Praxis
- [3] Fernández P., Blanca (2009) *Materiales para la enseñanza de las fracciones*. CSI-CSIF
- [4] Flores, P. (2004). *Del puzzle de la estrella a la incomensurabilidad y los radicales*. *Números*.
- [5] Hernán, F y Carrillo, E. *Recursos en el aula de matemáticas*. Ed. Síntesis
- [6] Montoya, C. y Flores, P. (2003). Los puzzles de alambre como recurso didáctico para la enseñanza de las matemáticas. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*.
- [7] Flores, P. (2005). De la geometría del elástico (topología) a los puzzles de alambre. XII JAEM. Albacete.

Autoría

- Nombre y Apellidos: Blanca Fernández Pérez
- Localidad, provincia: Pinos-Puente, Granada
- E-mail: blancafdez399@hotmail.com