



ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 N° 26 –ENERO DE 2010

## “MATEMÁTICAS CON GEOGEBRA”

AUTORÍA <b>ANTONIO JESÚS MARTÍNEZ RUEDA</b>
TEMÁTICA <b>MATEMÁTICAS</b>
ETAPA <b>ESO, BACHILLERATO</b>

### Resumen

La informática está muy ligada a la enseñanza en los últimos tiempos. El uso adecuado de los ordenadores aporta un mayor aprovechamiento del tiempo ya que el alumno está trabajando los conceptos de una forma diferente y que le llama más la atención comparándolo con el método de la pizarra y la tiza. Los programas de geometría dinámica constituyen una potente herramienta con una enorme utilidad didáctica en la clase de matemáticas. Uno de estos programas es Geogebra. Su fácil manejo y sus ilimitadas posibilidades de aplicación muestra cómo los alumnos se identifican con él, interesándose por las matemáticas. Describiré como llevaría el programa de Geogebra al aula para ver cómo trabajar con él, qué tipo de actividades realizar y los conceptos que afianzaremos.

### Palabras clave

Geogebra

Geometría

Competencia TIC

Educación Secundaria

Matemáticas

### 1. INTRODUCCIÓN

Las clases en las aulas de Educación Secundaria sobre los temas de geometría y de análisis pueden a veces dificultar mucho la comprensión de los conceptos por parte del alumno, por ejemplo, muchas veces ocurre que a los alumnos les cuesta comprender los enunciados de los teoremas y las propiedades de los objetos geométricos, su significado y sobre todo su demostración o justificación. Para paliar esta dificultad usaremos un programa informático llamado Geogebra. Es un excelente prototipo de facilidad de manejo inicial e ilimitadas posibilidades de aplicación.



ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 N° 26 –ENERO DE 2010

GeoGebra es un programa de diseño y cálculo simbólico para geometría y funciones que lo podemos utilizar para las matemáticas de la ESO y BACHILLERATO. Es básicamente un "procesador geométrico" y un "procesador algebraico". Geogebra es un sistema de geometría dinámica. Permite realizar construcciones tanto con puntos, vectores, segmentos, rectas, secciones cónicas como con funciones que a posteriori se pueden modificar dinámicamente.

Lo más importante de Geogebra es la interactividad, una vez construida una figura se puede mover cualquiera de los objetos independientes de la forma y automáticamente se modifican todos los que dependen de él. Esto permite una mayor comprensión de los conceptos matemáticos por parte de los alumnos, y permite trabajar directamente con ellos, lo que posibilita que razonen con estos nuevos conceptos y que además investiguen por sí mismos muchos objetos geométricos con la ayuda del programa. Por ejemplo, supongamos que tenemos dos puntos unidos por una recta y queremos trazar la recta que pasa por el punto medio y es perpendicular a la recta anterior. En el programa, colocamos los dos puntos y los unimos con una recta. A continuación le damos al botón mediatriz y nos trazará la recta que estamos buscando. Para ver la interactividad del programa, cogemos uno de los dos puntos y lo desplazamos. Observamos que la mediatriz también cambia, para pasar a ser la nueva mediatriz del segmento que formemos al desplazar uno de los puntos. Así se comprenden mejor los conceptos con la modificación en forma dinámica, es decir, si algún objeto B depende de otro A, al modificar A, también se actualiza B. También pueden definirse funciones reales de variable real, calcular y graficar sus derivadas, integrales, etc.

Otra de las grandes ventajas de este gran programa es su fácil manejo, con lo que podremos usarlo para cualquier curso de Educación Secundaria sin tener ningún tipo de problema de manejo. Este manejo básicamente trata de buscar el botón del objeto geométrico que queremos trazar, y ponerlo en pantalla.

Además, GeoGebra es un software matemático interactivo libre para la educación en colegios y universidades. Para conseguirlo basta poner en cualquier buscador de internet "download geogebra" y darle a alguno de los enlaces que salen, descargarlo e instalarlo en el ordenador. Ya solo queda abrir el programa y descubrir todas las maravillosas opciones que esconden este programa. También podremos encontrar este programa en la página oficial: <http://www.geogebra.org/cms/>



ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 N° 26 –ENERO DE 2010

## 2. OBJETIVOS A CONSEGUIR UTILIZANDO GEOGEBRA

- Conocer y saber utilizar Geogebra para el desenvolvimiento de diversos temas de geometría en la ESO y el bachillerato. .
- Manipular el dibujo para observar cómo cambian las propiedades del dibujo
- Comprender a través de manipulaciones los conceptos geométricos
- Utilizar métodos innovadores y tecnológicos como es un programa informático en el aula y reducir la merma de contenidos asociada al uso exclusivo de la pizarra y usar el ordenador en clase.
- Dar “vida” a los objetos con las ventajas que nos ofrece el programa como es dar movimiento.
- Elaborar construcciones con contenidos geométricos, algebraicos, aritméticos, analíticos o estadísticos por el alumnado

## 3. INFORMÁTICA EN EL AULA

En los tiempos que corren, con la instauración de los centros TIC y el gran avance de la informática en el aula, es importante realizar actividades donde se tenga que usar la informática. Al haber ya muchos centros TIC, no será ningún problema realizar actividades usando algún programa informático. Si no fuera así, casi todos los centros tienen un aula de ordenadores, donde podremos ir para hacer matemáticas en los ordenadores.

Con Geogebra conseguiremos esto. Trabajaremos los temas de geometría en este programa informático, usando así los ordenadores y cumpliendo con uno de los requisitos que la nueva sociedad está implantando en las aulas, el uso de los ordenadores y nuevas tecnologías.

Con este programa los alumnos ven las propiedades geométricas con facilidad pasmosa y, lo que es más importante, sin aburrirse lo más mínimo, además de manipularlas ellos mismos en el ordenador viendo los cambios en tiempo real.

También, estudiar la geometría con este programa nos permitirá evaluar la competencia TIC, ya que trabajaremos con medios informáticos y usaremos los ordenadores.



ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 N° 26 –ENERO DE 2010

#### 4. METODOLOGÍA

La clase donde usaremos el programa informático Geogebra la podemos plantear de varias formas: para explicar directamente los conceptos o para plantear actividades de ampliación y de repaso.

- Explicar los conceptos directamente: en la pizarra definiremos el concepto y a continuación los alumnos tienen que trazarlo en el ordenador con ayuda del Geogebra.
- Plantear actividades de ampliación y de repaso: para el desarrollo de esta clase le entregaremos a cada estudiante una hoja donde está dibujado la construcción que queremos que reproduzca mediante geogebra. Si la construcción es compleja podemos describir en la hoja los pasos para que el alumno utilizando el ratón, la barra de herramientas y la ventana gráfica de Geogebra construya el objeto geométrico. También plantearemos algunos ejercicios para que explore dicho objeto.

Además de trabajar la geometría Euclidea, la trigonometría y la geometría analítica también podemos usar Geogebra para explicar el cálculo, concretamente funciones y otras actividades que a continuación propongo. Además veremos algo de manejo del programa:

##### 4.1. Construcciones básicas

Cuando abrimos el programa, nos sale una ventana que está dividida en varias zonas: barra de herramientas, ventana de álgebra, zona gráfica y campo de entradas. Dándole a los botones que hay en la barra de herramientas con el ratón podremos construir las figuras que representan esos botones, cuyas ecuaciones o coordenadas aparecen en la ventana algebraica. En el campo de entradas pueden anotarse directamente coordenadas, ecuaciones, comandos y funciones que pasarán a representarse en la *Zona Gráfica* al ingresarse pulsando la tecla Enter. Como vemos, el manejo del programa es muy sencillo. Algunas de las construcciones que podríamos plantear como actividades son:

- Construir un triángulo ABC y circunscribirlo con su circunferencia

Tenemos que construir primero el triángulo, luego las mediatrices de sus lados, a continuación el punto donde se cortan las 3 mediatrices y finalmente dibujar la circunferencia. Así lo haremos en el programa:

Con el ratón pulsamos sobre la opción Polígono del menú que despliega la flechita del tercer ícono de la Barra de Herramientas, y en la Zona Gráfica construir el triángulo dando clic en tres puntos para crear sus vértices A, B y C y cerrarlo con un nuevo clic sobre A. Ya tenemos el triángulo construido, ahora construyamos las mediatrices, para ello, activando la opción Mediatriz del menú que abre el cuarto ícono, un clic sobre sendos lados del triángulo, traza la correspondiente a cada uno de ellos. El centro de la circunferencia que circunscribe al triángulo se construye al seleccionar la opción Intersección de dos objetos del segundo ícono y dar clic sobre las mediatrices recientemente trazadas. Rotulamos con una M a la intersección de las mediatrices gracias a la opción “renombra”, que por cierto, este punto se llamará circuncentro Para completar la construcción, nos queda hacer la



ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 N° 26 –ENERO DE 2010

circunferencia, la cual la conseguiremos seleccionamos la primera opción del menú del quinto icono Circunferencia dado el punto central... y marcamos primero el circuncentro y luego damos clic sobre cualquiera de los vértices del triángulo ABC. Podemos ver cómo cambia esta circunferencia si movemos algún vértice del triángulo a lo largo de la pantalla.

Esta construcción también la podríamos haber realizado utilizando el campo de entradas. La siguiente actividad la realizaremos utilizando el campo de entradas para ver cómo funciona:

- Representar con GeoGebra la circunferencia de ecuación  $x^2 + y^2 = 25$  y sus tangentes que pasan por el punto A de coordenadas (10, 4).

Introducimos en el campo de entradas los siguientes datos:

- La ecuación de la circunferencia c:  $x^2 + y^2 = 25$  y pulsamos Enter
- El comando C = Centro[c] y pulsar Enter
- A = (11, 4) para dibujar el punto A

Ahora en los menús seleccionamos Tangentes en el menú del cuarto icono y marcamos con clic el punto A y la circunferencia c. Podemos de nuevo desplazar el punto A para ver cómo cambian las tangentes a la circunferencia.

A continuación pongo otros conceptos matemáticos los cuales podremos realizar con Geogebra:

Función Afín

Función cuadrática

Sistema de ecuaciones e inecuaciones lineales

Triángulo conocidos sus tres lados

Triángulo conocidos dos lados y el ángulo comprendido

Triángulo conocidos dos ángulos y el lado comprendido

Triángulo conocidos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos

Distancia entre dos puntos

Parábola, Elipse e Hipérbola

Derivadas primera y segunda

Teorema Fundamental del Cálculo Integral

Teorema de Tales

División de un segmento en partes iguales

Construcción aproximada de un polígono regular de n lados

Cuatro círculos iguales

Circunferencia de los 9 puntos

Puntos, rectas, y circunferencias notables en el triángulo, baricentro, ortocentro e incentro

Funciones trigonométricas

Teorema del Seno y del coseno



ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 N° 26 –ENERO DE 2010

## 4.2. Tangram con Geogebra

El tangram es un rompecabezas fácil de construir puesto que se obtiene dividiendo un polígono en cuadrados triángulos, rombóides , etc. todo ello del modelo de tangram que queramos obtener . Como pasatiempo para construir figuras utilizándolo como un rompecabezas se debe seguir las siguientes reglas:

- Utilizar en cada figura todas las piezas
- No superponerlas

Por tanto, haremos que los alumnos construyan un tangram dividiendo un cuadrado en siete piezas que encajan para crear alguna forma. Lo harán con ayuda de Geogebra. El objetivo es montar una forma única y determinada con las siete piezas usando Geogebra. La forma ha de encajar todas las piezas sin que se superpongan. En esta actividad tan breve y sencilla, los alumnos aprenden qué son los tangrams y descubren distintas funciones matemáticas y una manera divertida de trabajar y de crear formas dinámicas entre todos los socios.

## 4.3. Funciones en Geogebra

Podemos trabajar también con funciones en geogebra, desplazarnos por ella, explorar sus propiedades, etc. Para ello, introduciremos la ecuación en el Campo de Entrada. Para desplazarnos por la gráfica diseñaremos un punto que podemos desplazar sobre la gráfica de la función y que nos muestra sus coordenadas. Para hacerlo debemos diseñar previamente otros objetos como se indica a continuación:

1. Representamos gráficamente la función que queremos estudiar.
2. Construimos un punto que se desplace solo por el eje de abscisas (eje de las x). Seleccionamos la opción “Nuevo Punto” y marcamos un punto cualquiera del eje de abscisas. Se crea un punto A y en la Ventana Algebraica se muestran sus coordenadas. Seleccionamos la herramienta de “Desplaza” y movemos el punto creado. Si este punto lo hubiésemos creado sobre la gráfica de la función, se movería sobre ella. Este es el punto que queremos crear, pero vamos a hacer que se mueva cuando desplazemos el punto creado sobre el eje OX.
3. Creamos el punto B de la gráfica cuya abscisa coincide con la del punto A. Basta con trazar por el punto A una recta perpendicular al eje OX, el punto de intersección de esta recta y la gráfica de la función es el punto B buscado. Seleccionamos la opción “Recta Perpendicular” y marcamos con el ratón el punto A y el eje OX, se creará como objeto dependiente la recta de ecuación  $x = \langle \text{valor de la abscisa del punto A} \rangle$ .



ISSN 1988-6047    DEP. LEGAL: GR 2922/2007    Nº 26 –ENERO DE 2010

Ahora tenemos que crear el punto B, intersección de la recta perpendicular creada y la gráfica de la función  $f(x)$ . Desplegamos las opciones del botón “Nuevo Punto” pulsando sobre su vértice inferior derecho y seleccionamos la opción “Intersección de dos objetos”. Si cuando tienes esta opción seleccionada, pulsas sobre la gráfica y la recta, se crea el punto B, intersección de ambas.

Ocultamos la recta perpendicular. Seleccionamos la recta perpendicular pulsando el botón derecho del ratón para que aparezca el menú contextual, y veremos que está marcada la opción “Expone Objeto”, pulsamos sobre ella para desmarcarla.

Mostramos las coordenadas del punto B. Seleccionamos el punto B, accedemos a su menú contextual, seleccionamos “Propiedades”, seleccionamos la ficha “Básico” y en “Expone rótulo”, seleccionamos Nombre & Valor. Podemos usar las opciones de las fichas Color y Estilo para modificar el color y el tamaño del punto.

Por tanto, gracias a Geogebra podemos representar todo tipo de funciones, con la opción de poder desplazarnos por ellas y ver cómo van cambiando los valores de la función. También se puede para resolver todo tipo de ecuaciones e inecuaciones con una incógnita.

## 5. GEOGEBRA FRENTE A CABRI II

Ya hemos dicho en párrafos anteriores que Geogebra es un programa lleno de interactividad y de muy fácil manejo, por lo que muchos profesores lo usan. Hay otro programa de geometría llamado Cabri II que es muy famoso ya que también se usa en las aulas, aunque en los últimos tiempos se está imponiendo Geogebra frente a Cabri II. ¿Cuál es la diferencia entre uno y otro?

En el manejo, prácticamente los dos son iguales de sencillos, por lo que no hay mucha diferencia en la dificultad del manejo. La principal diferencia está en que Geogebra es un programa libre, y se podrá encontrar en muchos puntos de internet, con lo que descargándolo e instalándolo podremos trabajar ya con Geogebra, mientras que Cabri II necesitas obtener su licencia para poder trabajar con él, por lo que no es un programa gratuito.

Otra diferencia práctica es que Cabri sólo está disponible para las plataformas Windows y Mac OS, ambos sistemas operativos elevan los costos de las máquinas en las que funcionan, mientras que Geogebra está basado en java, transformándolo en un software multiplataforma, funcionando en cualquier sistema operativo que soporte éste lenguaje (tanto Windows como Mac, además de Linux e incluso algunos celulares). Recordemos que en casi todos los centros TIC los ordenadores que hay tiene instalado el sistema operativo Linux, lo cual es una gran ventaja poder encontramos que Geogebra funciona con Linux mientras que Cabri II no.



ISSN 1988-6047    DEP. LEGAL: GR 2922/2007    Nº 26 –ENERO DE 2010

## 6. BIBLIOGRAFÍA

- Pérez Gómez, R. (2004). *Matemáticas para compartir la belleza*. Granada: Ed Distrimagen, S.L.
- Muñoz, M. (2005). *Guía rápida de referencia sobre geogebra*. Madrid: Ed. RA-MA
- Moreno Jiménez, S. (2007). *Geogebra*. Madrid: Ed. Bubok Publishing S.L.

### Autoría

---

- Nombre y Apellidos: Antonio Jesús Martínez Rueda
- Centro, localidad, provincia: Granada
- E-mail: [jssrueda16@hotmail.com](mailto:jssrueda16@hotmail.com)