

“DIDÁCTICA DEL ÁLGEBRA”

AUTORÍA GUILLERMO SIERRA TORTOSA
TEMÁTICA ÁLGEBRA, RECURSOS, DIDÁCTICA
ETAPA ESO, BACHILLERATO

Resumen

En este artículo se pretende analizar la importancia del álgebra en el currículo de matemáticas en la Educación Secundaria. Nos intentaremos centrar en la importancia de una metodología adecuada para que la enseñanza del álgebra sea motivadora para nuestros alumnos y alumnas. Intentaremos analizar los diferentes recursos que podemos utilizar para romper con el tópico de que el álgebra es una disciplina “difícil”.

Palabras clave

Matemáticas, álgebra, recursos didácticos.

1. INTRODUCCIÓN

1.1. La algebratización de las matemáticas

Es conocido por todos que a partir del siglo XVIII comenzó una tendencia clave en el pensamiento matemático, que algunos autores llamaron “la algebratización de las matemáticas”, a lo largo de la historia el álgebra ha ido de la mano de la aritmética. Pero existe mucho matices ya que la aritmética es la ciencia que se ocupa de los objetos concretos, esto es, de los números. En cambio el Álgebra es, en esencia, la doctrina de las operaciones matemáticas analizadas desde un punto de vista abstracto y genérico, independientemente de los números o objetos concretos.

Es con autores como Euler, cuando se generalizan las reglas de resolución de problemas aritméticos; se desarrolla el aparato simbólico-literal del álgebra; se aclaran las operaciones con números, monomios, radicales y complejos; se introducen los logaritmos; se dan las reglas de extracción de las raíces de números y de expresiones algebraicas polinomiales; se introducen las serie como medio de expresión de las funciones racionales fraccionarias y binomiales con exponentes fraccionarios y negativos de una potencia; se introducen los números poligonales, las proporciones y progresiones, las fracciones decimales periódicas y se estudian los métodos de resolución de

ecuaciones algebraicas. Y con todos estos resultados se ve como el álgebra es una disciplina indispensable para el resto de disciplinas de las matemáticas.

Todo esto debe tenerse en cuenta a la hora de enseñar álgebra a nuestros alumnos y alumnas, esta disciplina es una herramienta indispensable para nuestro alumnado, es decir, sino manejan el álgebra, tampoco podrán adquirir unas competencias necesarias para el análisis, estadística, geometría, además de en otras áreas como en ciencias, economía, etcétera.

1.2. El álgebra y la realidad

Los profesores y profesoras de matemáticas tenemos siempre un gran reto, mostrar la utilidad de las matemáticas a nuestros alumnos y alumnas, es decir, que nuestro alumnado entienda que las matemáticas les van a ser útiles para su vida. Cuando explicamos álgebra esta relación parece menos visible, pero no por ello es menos tangible. Debemos mostrarles el álgebra como una herramienta muy útil para resolver problemas de la vida cotidiana.

Vamos a poner un ejemplo de como con poco podemos enseñar álgebra a nuestros alumnos y alumnas de una manera más amena.

Este sería el enunciado de un problema de álgebra para un alumnado de 2º ESO. “Un comerciante de ultramarinos vende el Kg de azúcar a 1,2 €. Además, tiene café de dos clases; cuando toma 2 Kg de la primera calidad y 3 Kg de la segunda resulta la mezcla a 1,56 € el Kg y cuando toma 3 Kg de la primera clase y 2 Kg de la segunda entonces resulta la mezcla a 2,14 € el Kg ¿Cuál es el precio de cada calidad de café?”. Como se puede leer la sola lectura del problema ya aburre a cualquier lector. Probablemente nuestros alumnos y alumnas no suelen ir a comprar azúcar y mucho menos café, luego el precio de este no está entre sus principales inquietudes.

Sin embargo si les proponemos un problema como este. “Para jugar un partido de fútbol, se hace una prueba para elegir a los 15 jugadores. La prueba tiene tres partes: en la primera parte se eliminaron 8 personas, en la segunda pasan adelante la mitad de las que quedaban y en la tercera salen elegidas $\frac{1}{3}$ de las personas que llegan a esta ultima parte. ¿Cuántas personas se presentaron al principio a la prueba?”. Nuestros alumnos y alumnas verán el problema como algo más cercano, no obstante si esperamos que con estos pequeños detalles vamos a conseguir la tan ansiada motivación de nuestros alumnos y alumnas, es que somos bastante ilusos. Esta claro que se necesita algo más, aquí analizaremos algunos de estos recursos que pueden ser unos buenos aliados para la enseñanza del álgebra.

2. RECURSOS TIC PARA EL ÁLGEBRA

Los recursos TIC son unos aliados indispensables para nuestra actividad docentes, estas herramientas bien usadas fomenta la motivación entre nuestros alumnos y alumnas. Cuando nuestro alumnado ya ha aprendido a hacer todos los cálculos necesarios para hacer problemas con el álgebra,

podemos enseñarlos a delegar lo tedioso de los cálculos en las máquinas y que se centren en la interpretación de los resultados. Aquí mostraremos algunos recursos que nos pueden ayudar en esta tarea:

- **Proyecto Descartes:** Fue un proyecto diseñado en 1998 con el propósito de diseñar herramientas informáticas y con ellas materiales educativos. Al igual que JClic es un programa de entorno java y que trabaja mediante applet. Este proyecto sólo se centra en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas mediante el uso de las TIC. Las unidades didácticas son algo más completas que las de JClic. Se trata de un proyecto llevado a cabo por el Ministerio de Educación y Ciencia. No sólo es una colección de unidades didácticas, sino que es una potente plataforma para el intercambio de experiencias entre profesores de Matemáticas interesados en el uso de las TIC en sus aulas. Esta plataforma en la que se comparten las experiencias, los materiales y se analizan los resultados recibe el nombre de WEB EDA. Los resultados obtenidos por este proyecto son muy satisfactorios y cuenta con gran prestigio entre el profesorado de Matemáticas. Este material se puede utilizar desde una manera muy elemental, hasta ya de una forma más avanzada, ya que permite que cada profesor o profesora modifique las unidades, adaptándolas a las necesidades de sus alumnos y alumnas. Si el lector o lectora se anima a utilizar este recurso, se le recomienda realizar algún curso de formación, desde la red de formación tanto del cnice, como desde los Centros de Profesores de la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía, ya que son múltiples los cursos que convocan sobre este recurso. Es una herramienta muy útil para la enseñanza del álgebra, además permite un trabajo muy autónomo por parte del alumno o alumna.
- **JClic:** Se trata de una colección de aplicaciones informáticas, que se presentan ordenadas como en una librería de manera que aparecen empaquetadas en diferentes proyectos. También dispone de un buscador que te permite acceder de forma instantánea a las diferentes unidades didácticas, en las que aparecen actividades en un applet. Se desarrolla en la plataforma java y es válido para multitud de sistemas operativos. Es heredero del proyecto Clic que se inició en 1992. Este recurso nos permite trabajar en un grupo de treinta alumnos o alumnas a treinta niveles diferentes. Las unidades abarcan todas las áreas del currículo y todos los niveles, desde primaria hasta bachillerato. Por todo ello es un recurso muy interesante para trabajar el álgebra con nuestros alumnos y alumnas. Mi experiencia con este material es muy positiva, ya que el propio alumno o alumna busca las unidades adecuadas a su nivel, a la vez que va realizando las actividades, el programa corrige los errores y registra el número de intentos para que el profesor o profesora pueda revisar los resultados.
- **Averroes:** Es la red temática educativa de Andalucía. En ella podéis encontrar multitud de recursos didácticos, que se encuentran separados por niveles. En muchos de estos recursos, las TIC y la enseñanza de las matemáticas y en particular del álgebra aparecen. Además encontraréis bastante información sobre formación del profesorado en estos temas.

- WebQuest: Es un tipo de actividad didáctica que consiste en una investigación guiada, con recursos principalmente procedentes de Internet, que promueve la utilización de habilidades cognitivas superiores, el trabajo cooperativo y la autonomía de los alumnos e incluye una evaluación auténtica. El antecedente de estas actividades lo constituye el uso de retos (challenging learning) en el desarrollo de ambientes de aprendizaje basados en tecnologías de la información que aplican desde los ochenta. Las WebQuest son utilizadas como recurso didáctico por los profesores, puesto que permiten el desarrollo de habilidades de manejo de información y el desarrollo de competencias relacionadas con la sociedad de la información. Una WebQuest se construye alrededor de una tarea atractiva que provoca procesos de pensamiento superior. Se trata de hacer algo con la información. El pensamiento puede ser creativo o crítico e implicar la resolución de problemas, enunciación de juicios, análisis o síntesis. La tarea debe consistir en algo más que en contestar a simples preguntas o reproducir lo que hay en la pantalla. Idealmente, se debe corresponder con algo que en la vida normal hacen los adultos fuera de la escuela. Para desarrollar una WebQuest es necesario crear un sitio web que puede ser construido con un editor HTML, un servicio de blog o incluso con un procesador de textos que pueda guardar archivos como una página web. No hay que confundir una *webquest* con "caza del tesoro". Una "caza del tesoro" tiene también utilización como recurso educativo pero es más sencilla. En ella se plantean una serie de preguntas sobre un tema que se pueden contestar visitando unos enlaces de otras páginas relacionadas con el tema. Muchas veces se hace una pregunta principal al final para comprobar los conocimientos adquiridos sobre el tema. Hay multitud de ellas creadas para trabajar el álgebra, pero también es recomendable crear nuevas que se ajusten más a las necesidades particulares de nuestros alumnos y alumnas.
- WIRIS: Es una plataforma en línea para cálculos matemáticos diseñada específicamente para la educación. Se accede de manera gratuita a ella y está respaldada por diversas comunidades autónomas y también es usada en otros países. En la animación podrás ver el entorno de trabajo que te ofrece y las inmensas posibilidades matemáticas que brinda. La principal función de WIRIS es apoyar el aprendizaje de los alumnos, por lo que es una herramienta especialmente dirigida a este fin en el contexto de las TIC. Como motor matemático, tanto su uso como explicación a los alumnos es muy simple, ya que está orientado al trabajo en el aula. Como herramienta en línea, no necesita ningún tipo de software especial más que la conexión a Internet. Para el álgebra, WIRIS ofrece técnicas para encontrar todas las soluciones de ecuaciones y para resolver sistemas de ecuaciones lineales y no lineales. Esto aporta múltiples ventajas propias de este recurso. Su rango de aplicación va desde los estudios de primaria hasta los universitarios.
- Hot Potatoes: es un sistema para crear ejercicios educativos que pueden realizarse posteriormente a través de la web. Los ejercicios que crea son del tipo respuesta corta, selección múltiple, rellenar los huecos, crucigramas, emparajamiento y variados. Su licencia no es libre, pero sí que permite su uso a instituciones educativas públicas sin ánimo de lucro siempre que los resultados sean accesibles vía web a cualquier persona. Es una creación del Centro de Humanidades y Computación de la Universidad de C/ Recogidas Nº 45 - 6ªA 18005 Granada csifrevistad@gmail.com

Victoria, en Canadá. para crear ejercicios sólo hay que introducir los datos (textos, preguntas, respuestas, etc) y el programa generará las páginas Web automáticamente. Posteriormente se pueden publicar dichas páginas en cualquier servidor.

- GeoGebra: Es un software de matemática para educación en todos sus niveles, que reúne dinámicamente, aritmética, geometría, álgebra y cálculo. Ofrece múltiples representaciones de los objetos desde cada una de sus posibles perspectivas: vistas gráficas, algebraicas y hojas de datos dinámicamente vinculadas. En tanto GeoGebra es un sistema de geometría dinámica (como Cabri o SketchPad Geométrico) centrado en el tratamiento dinámico de objetos geométricos, sustenta la idea de conectar representaciones geométricas, algebraicas y numéricas interactivamente. Permite realizar construcciones tanto con puntos, vectores, segmentos, rectas, secciones cónicas como con funciones que, a posteriori, pueden modificarse dinámicamente. Por otra parte, se pueden ingresar ecuaciones y coordenadas directamente. Así, GeoGebra tiene la potencia de manejarse con variables vinculadas a números, vectores y puntos; permite hallar derivadas e integrales de funciones y ofrece un repertorio de comandos propios del análisis matemático, para identificar puntos singulares de una función, como Raíces o Extremos. Así se pueden graficar funciones con facilidad, operar con deslizadores para investigar su comportamiento paramétrico, encontrar derivaciones así como hallar derivadas y usar comandos de la potencia de Raíz o Secuencia.
- Derive: Es una aplicación destinada a cualquier estudiante, profesor o profesional que tenga que realizar algún tipo de tarea relacionada con las matemáticas. Es capaz de abordar complejos problemas de álgebra y cálculo y trabajar de forma rápida y eficaz con matrices y vectores. Además posee un entorno visual muy cómodo y sencillo que soporta todo tipo de gráficas y representaciones. Procesa variables algebraicas, expresiones, ecuaciones, funciones, vectores, matrices y expresiones booleanas. Uno de los programas más utilizados en entornos relacionados con las matemáticas y el álgebra.
- Creador Mágico de Problemas para Matemáticas (Magic Problems Creator for Mathematics 1.7): Este programa tiene un potente asistente para ayudarle a Crear sus propias colecciones de problemas personalizados de álgebra: Matrices, determinantes, ecuaciones matriciales, estudio de sistemas de ecuaciones, etcétera.
- Graph: Herramienta para dibujar todo tipo de gráficas matemáticas, realizando una representación visual de estas en un sistema de coordenadas X-Y. El programa permite funciones estándar, de parámetros y polares; puede realizar algunos cálculos sobre las funciones y admite añadir en la interfaz tantas funciones como sea necesario. A cada una de ellas se puede asignar un color y tipo de línea, o hacerlas temporalmente invisibles, para distinguirlas mejor. Permite añadir sombra a la gráfica, introducir series de puntos al sistema de coordenadas y copiar la imagen a otra aplicación o guardarla en formato BMP o PNG. Este programa fue creado por el danés Iván Jonassen.
- EcuacionES: Se trata de un tutor para ayudar a resolver ecuaciones de segundo grado. Solo hay que introducir los datos de la ecuación y los resultados se pueden obtener en

notación decimal, científica y simplificada con fracciones. Permite múltiples operaciones con los números introducidos (multiplicar y dividir por pi, calcular la inversa, elevar a cualquier número, cambiar entre notación científica y decimal, etc). Es muy sencillo de usar, aunque se deben tener buenos conocimientos matemáticos para obtener resultados. Este programa fue creado por el español Oscar Martínez Llobet.

- **Matemáticas 1.0:** Es un programa educativo para practicar matemáticas. Incluye una colección de ejercicios con la posibilidad de imprimirlos. El programa permite modificar la dificultad y el número de ejercicios de cada sección. Los tipos de ejercicios son variados pudiendo encontrar entre otros: descomposición factorial, resolución de ecuaciones, sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, áreas y perímetros de polígonos regulares, etcétera.
- **Triangulo:** Es un programa interactivo de Trigonometría. Tiene la posibilidad de "construir" el triángulo a partir de la señalización de sus tres vértices con el ratón. Una vez definido el triángulo podremos transformarlo y conocer sus características. Por otra parte podremos construirlo a partir de 3 de sus datos básicos (lados y ángulos). Una vez "resuelto" el triángulo podremos acceder a su construcción geométrica con "regla y compás". También podremos obtener las razones geométricas (medianas y su baricentro, mediatrices y su circuncentro, etc). El programa dispone entre otros transformadores de grados a radianes y una sección de ejercicios típicos.
- **CARMetal:** Es una adaptación del programa de geometría dinámica CAR, cuya interfaz y características han sido modificadas para eliminar pasos intermedios y facilitar la elaboración de figuras. Permite trabajar con rectas, semirectas, paralelas, perpendiculares, segmentos, polígonos, ángulos, etcétera. Además, es posible realizar cálculos matemáticos complejos como funciones y fórmulas. También es posible añadir texto sobre la superficie de la representación y obtener información sobre cada uno de los puntos creados.
- **DR.GEO:** Es un programa tanto de geometría interactiva como de programación en el lenguaje Scheme. Permite crear figuras geométricas, así como manipularlas interactivamente respetando sus restricciones geométricas. Ofrece igualmente la posibilidad de introducirse gradualmente en la programación. Es útil para la enseñanza a estudiantes de nivel básico o superior. La interfaz de usuario de DR.GEO ha sido concebida para dar, dentro de un conjunto armónico, a la vez sencillez en su operación, ergonomía y funcionalidades avanzadas. Así, la interfaz de DR.GEO, con una gran sencillez, permite al neófito la familiarización con las funciones básicas del programa. Posteriormente, a medida que las conozca más, el usuario conocerá los aspectos más avanzados de la interfaz y del funcionamiento de DR.GEO: múltiples modos para la construcción de objetos, macros de construcciones, sesiones, adaptabilidad de la interfaz, uso de scripts y de Figuras Scheme de DR.GEO (i.e. DR.GEO es programable en dos modos distintos). Estas funciones avanzadas generan muy poca sobrecarga a la interfaz, por lo que DR.GEO es utilizado con entusiasmo en la enseñanza primaria, lo que no resta su uso en el nivel medio.

- Kgeo: Es una aplicación interactiva para aprender geometría, con una ventana principal donde nos muestra un sistema de referencia en el plano con sus ejes cartesianos graduados, una serie de herramientas geométricas dispuestas en los laterales y una barra superior con las opciones generales de la aplicación. Por su parte, Kpercentge es una utilidad diseñada a modo de cuestionario en la que debemos resolver diferentes operaciones con porcentajes, tanto en sentido directo como inverso. Podemos elegir el número de preguntas por cuestionario y su nivel de dificultad. El sistema nos ofrece un gráfico indicativo de nuestro nivel de aciertos.
- TracenPoche: Es un software libre de geometría dinámica disponible en Internet o localmente, desarrollado por la asociación francesa Sésamath. TracenPoche es un plan de estudios de matemáticas muy completo elaborado por un equipo de expertos, diseñadores de programas y unos 300 profesores y profesoras de matemáticas. Este proyecto ofrece no sólo una alta calidad en su material, sino también una demostrada capacidad para llegar a un número de alumnos, alumnas y docentes.

3. OTROS RECURSOS

Además de los recursos tic existen otros muchos que también nos pueden ser de gran ayuda para motivar a nuestros alumnos y alumnas para entender el álgebra y adquirir una buena competencia en esta disciplina. Veamos algunos ejemplos:

- Cartas de ecuaciones: Se trata de un juego en el que se reparten una cartas en las que unas tienen una ecuación y otras posibles soluciones. El juego consiste en repartir todas las cartas e ir haciendo parejas que se irán descartando. Gana el juego el alumno o alumna que se queda primero sin cartas.
- Tablero de valores numéricos: Se trata de un tablero tipo “el juego de la oca”, en el que en cada casilla hay un polinomio, el juego consiste en tirar el dado y calcular el valor numérico de la casilla, tomando el valor del dado y se avanzan o retroceden tantas casillas como dicho valor numérico indica.
- Dominó de ecuaciones: Se trata del clásico juego del dominó, pero con la peculiaridad de que en cada ficha hay ecuaciones y soluciones, para conectar dos fichas tenemos que casar ecuación con solución.
- Biografías: La lectura y análisis de biografías de matemáticos famosos nos puede ayudar a entender el álgebra, saber como ha ido evolucionando el pensamiento humano en esta disciplina es importante para entenderla mejor.
- Crucigramas de ecuaciones: Se trata de un crucigrama en el que las casillas se rellenan con números que son soluciones de una serie de ecuaciones que se dan como pistas. Esta actividad suele tener una gran aceptación entre el alumnado.

- Sudokus: Este pasatiempo se ha hecho muy famoso últimamente, se trata de un rompecabezas matemático de colocación que se popularizó en Japón en 1986 y se dio a conocer en el ámbito internacional en 2005. El objetivo es rellenar una cuadrícula de 9×9 celdas dividida en subcuadrículas (también llamadas "cajas" o "regiones") de 3×3 con las cifras del 1 al 9 partiendo de algunos números ya dispuestos en algunas de las celdas. No se debe repetir ninguna cifra en una misma fila, columna o subcuadrícula.

4. CONCLUSIÓN

Como podéis comprobar hay numerosos recursos que nos pueden ayudar para llevar a buen término el proceso de enseñanza y aprendizaje de nuestros alumnos y alumnas. Aquí se han presentado algunos de ellos, pero sin duda hay muchos más que se pueden encontrar fácilmente en las diferentes redes de intercambio de información de las que disponemos los profesores y profesoras.

Como se dijo, una de las claves para que nuestro alumnado adquiera la competencia matemática es que tenga un buen dominio del álgebra, todas las matemáticas y en general las ciencias están llenas del álgebra, se podría decir que el álgebra es el idioma de las matemáticas y por tanto de las ciencias.

5. BIBLIOGRAFÍA

Boyer, B. (1986). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

Ribnikov, K. (1974). *Historia de las Matemáticas*. Moscú: Ed. Mir.

Cabero, J. (1994). *Nuevas TIC para la Educación*. Sevilla: Alfar.

Ariza, J. (2002). *TIC aplicadas a la educación*. Málaga: Aljibe.

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del Álgebra*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Frege, G. (1974). *Escritos lógicos-Semánticos*. Madrid: Editorial Tecnos.

Autoría

- Nombre y Apellidos: Guillermo Sierra Tortosa
- Centro, localidad, provincia: IES Albaida (Almería)
- E-mail: g_s_tortosa@hotmail.com