INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS
REVISTA DIGITAL

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 26 – ENERO 2010

"LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS: APLICACIONES Y USO DE HERRAMIENTAS TIC"

AUTORÍA **MARIA DEL CARMEN CABRERA MARTÍN**
TEMÁTICA **MATEMATICAS**
ETAPA **BACHILLERATO**

Resumen

La trigonometría es una ciencia antigua, no obstante, la sistematización de sus principios y teoremas no se produjo hasta el siglo XVI, para incorporarse como una herramienta esencial en los desarrollos del análisis matemático moderno.

Son extensas las aplicaciones que se le han dado a las funciones trigonométricas desde la antigüedad hasta nuestros días, como aplicaciones de gran relevancia en la actualidad destacaremos el modelado de la corriente alterna y las modulaciones AM y FM.

Para facilitar el aprendizaje de las funciones circulares se puede hacer uso tanto de las calculadoras gráficas, como de actividades con el ordenador.

Palabras clave

Aplicaciones de funciones trigonométricas.

Funciones trigonométricas.

Corriente alterna.

Modulación AM. Modulación FM.

Herramientas TIC.

1. INTRODUCCIÓN

En la historia de la trigonometría podemos remontarnos a las primeras matemáticas conocidas, en Egipto y Babilonia. Los egipcios establecieron la medida de los ángulos en grados, minutos y segundos. Sin embargo, hasta los tiempos de la Grecia clásica no empezó a haber trigonometría en las

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 26 – ENERO 2010

matemáticas. En el siglo II a. C. el astrónomo **Hiparco de Nicea** realizó una tabla trigonométrica para resolver triángulos, con resultados similares a los de la moderna tabla del seno.

Menelao escribió sus libros sobre las cuerdas de la circunferencia, que se sitúa hacia el fin del primer siglo de nuestra era. Este trabajo puede ser que tuviera modelos que se remontaba a Hiparco, la atención de las matemáticas fue atraída desde Menelao hacia “La semicuerda del arco doble” nuestro seno, que desde entonces tiene un papel fundamental.

A finales del siglo VIII los astrónomos árabes, que habían recibido la herencia de las tradiciones de Grecia y de la India, prefirieron trabajar con la función seno. En las últimas décadas del siglo X ya habían completado la función seno y las otras cinco funciones y habían descubierto y demostrado varios teoremas fundamentales de la trigonometría tanto para triángulos planos como esféricos. Todos estos descubrimientos se aplicaron a la astronomía y también se utilizaron para medir el tiempo astronómico y para encontrar la dirección de la Meca, lo que era necesario para las cinco oraciones diarias requeridas por la ley islámica

El occidente se familiarizó con la trigonometría árabe a través de traducciones de libros de astronomía arábigos, que comenzaron a aparecer en el siglo XII. El primer trabajo importante en esta materia en Europa fue, De triangulus escrito por el matemático y astrónomo alemán Johann Müller, llamado Regiomontano.

En el s. XVII, Isaac Newton inventó el cálculo diferencial e integral. Uno de los fundamentos del trabajo de Newton fue la representación de muchas funciones matemáticas utilizando series infinitas de potencias de la variable x. Newton encontró la serie para el sen x y series similares para el cos x y la tgx. Con la invención del cálculo las funciones trigonométricas fueron incorporadas al análisis, donde todavía hoy desempeñan un importante papel tanto en las matemáticas puras como en las aplicadas.

Un siglo después, el matemático suizo Leonhard Euler fue el que fundó verdaderamente la trigonometría moderna y definió las funciones trigonométricas utilizando expresiones con exponenciales de números complejos. Esto convirtió a la trigonometría en sólo una de las muchas aplicaciones de los números complejos.

Euler demostró que las propiedades básicas de la trigonometría eran simplemente producto de la aritmética de los números complejos. Así la llamada identidad de Euler, es una de las fórmulas más importantes de las matemáticas, pues une de forma escueta distintos campos de esta ciencia:

$$e^{i\cdot\pi} + 1 = 0$$

En ella se aúnan los números más importantes de la geometría, el análisis y el álgebra: π, e y i. Además 0 y 1 son las bases de la aritmética por ser los elementos neutros respectivamente de la adición y la multiplicación.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 26 – ENERO 2010

2. FUNCIONES TRIGONOMETRICAS.

Una función trigonométricas, también llamada circular, es aquella que se define por la aplicación de una razón trigonométrica a los distintos valores de la variable independiente, que ha de estar expresada en radianes. Como principales funciones trigonométricas, se pueden encontrar:

- Función seno

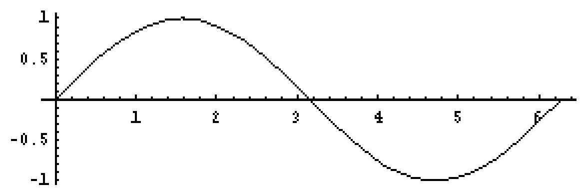

Ilustración 1. Periodo fundamental de la función seno.

Se denota por f(x)=senx, a la aplicación de la razón trigonométrica seno a una variable independiente x expresada en radianes.

La función seno es periódica, acotada y continua, y su dominio de definición es el conjunto de todos los números reales.

- Función coseno

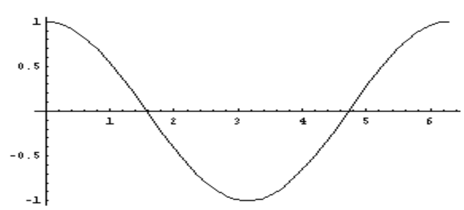

Ilustración 2. Periodo fundamental de la función coseno.

Se denota por f(x)=cosx, a la aplicación de la razón trigonométrica coseno a una variable independiente x expresada en radianes.

Esta función es periódica, acotada y continua, y existe para todo el conjunto de los números reales.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 26 – ENERO 2010

- Función tangente

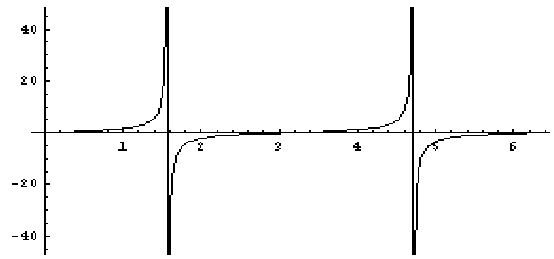

Ilustración 3. Periodo fundamental de la función tangente.

Se denota por f(x)=tgx, de una variable independiente x expresada en radianes a la aplicación de las razón trigonométrica tangente.

Existen seis clases de funciones trigonométricas: seno y su inversa, la cosecante; coseno y su inversa, la secante; y tangente y su inversa, la cotangente. Para cada una de ellas pueden también definirse funciones circulares inversas: arco seno, arco coseno, etcétera.

3. APLICACIONES

Las primeras aplicaciones de la trigonometría se hicieron en los campos de la navegación, la geodesia y la astronomía, en las que el principal problema era determinar una distancia inaccesible, como la distancia entre la Tierra y la Luna, o una distancia que no podía ser medida de forma directa. Otras aplicaciones de las funciones trigonométricas se pueden encontrar en casi todas las ramas de la ingeniería, sobre todo en el estudio de fenómenos periódicos, como el sonido o el flujo de corriente alterna.

Nos centraremos en 2 aplicaciones que pueden captar con más facilidad la atención del alumnado, ya que están inmersas en la vida cotidiana de la sociedad actual, como son la corriente eléctrica y la modulación AM y FM (que son la base de la radio AM y FM).

3.1 LA CORRIENTE ELECTRICA.

El termino corriente eléctrica se emplea para describir la tasa de flujo de carga que pasa por alguna región de espacio. La mayor parte de las aplicaciones prácticas de la electricidad tienen que ver con corrientes eléctricas. Por ejemplo, la batería de una luz de destellos suministra corriente al filamento de la bombilla cuando el interruptor se conecta.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 26 – ENERO 2010

Se denomina corriente alterna a la corriente eléctrica en la que la magnitud y dirección varían cíclicamente. La forma de onda de la corriente alterna más comúnmente utilizada es la de una onda sinusoidal, puesto que se consigue una transmisión más eficiente de la energía.

Se utiliza la función seno para modelar la corriente alterna senoidal, ya que presenta las siguientes ventajas:

- Se opera con facilidad y define con precisión analítica y gráfica la evolución de la intensidad a lo largo del tiempo.
- Se puede generar con facilidad en magnitudes de valor muy elevado.
- Se modifican con facilidad los valores de tensión e intensidad mediante transformadores.
- Todas las ondas no senoidales se pueden descomponer en ondas senoidales de diferentes frecuencias (armónicos).

Definición matemática.

Como ya hemos dicho, la onda senoidal de CA tiene una expresión matemática que corresponde a la función seno. La expresión $y = sen\alpha$ define la función seno, pero cuando se trata de magnitudes en CA es necesario expresarlas en función del tiempo transcurrido.

El ángulo está relacionado con el tiempo mediante la expresión:

$$\omega = \alpha / t$$
$$y = sen\omega \cdot t$$

Siendo:

ω: Velocidad angular en rad/s.

α : Ángulo descrito en radianes.

t: Tiempo transcurrido en segundos.

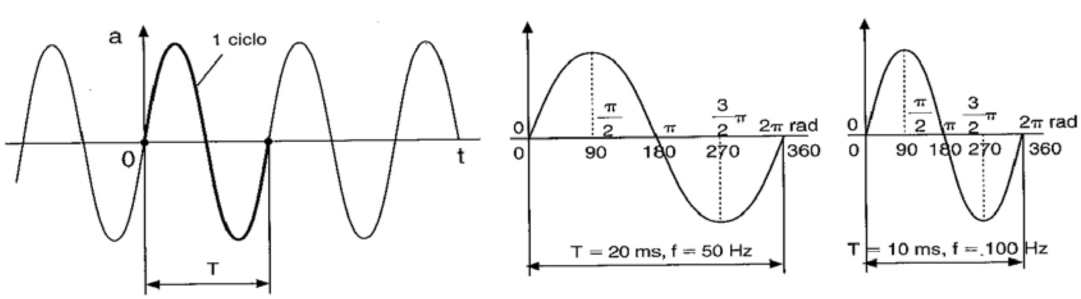

Ilustración 4. Periodo fundamental de la función coseno.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 26 – ENERO 2010

En la Ilustración 4, se muestra como se modela la corriente alterna mediante la función seno, tendremos que ahora la variable independiente es el tiempo, que como se ha visto se puede relacionar con el ángulo. En la primera figura se ve como a un periodo T, se le llama ciclo. En la segunda figura se muestra un periodo de 20 ms, lo que equivale a una frecuencia de 50 Hz (recordemos que la frecuencia es la inversa del periodo) esta frecuencia es la que tiene la corriente eléctrica en Europa. En la última figura se muestra el periodo fundamental para la corriente eléctrica Americana (frecuencia de 100 Hz).

3.2 MODULACIONES.

Se puede definir la palabra modular como: *"Variar el valor de la amplitud, frecuencia o fase de una onda portadora en función de una señal"*. En efecto, en nuestro caso vamos a ver como se varía el valor de la amplitud de la onda portadora en función de la moduladora, para la modulación AM, y en el caso de la modulación FM se variará la frecuencia. Nuestras ondas portadoras serán ondas sinusoidales.

Modulación AM.

La amplitud modulada (AM) o modulación de amplitud es un tipo de modulación lineal que consiste en modificar la amplitud de una señal de alta frecuencia, denominada portadora, en función de una señal de baja frecuencia, denominada moduladora, la cual es la señal que contiene la información que se desea transmitir.

La AM es usada en la radiofonía, en las ondas medias, ondas cortas, e incluso en la VHF: es utilizada en las comunicaciones radiales entre los aviones y las torres de control de los aeropuertos.

Definición matemática.

La ecuación de la señal modulada en AM es la siguiente:

$$y(t) = A_p \cdot [1 + m \cdot x_n(t)] \cdot cos(w_p \cdot t)$$

Siendo:

- $y(t)$ = Señal modulada.
- $x_n(t)$ = Señal moduladora normalizada.
- m = Índice de modulación normalizado.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 26 – ENERO 2010

Simplemente se trata de multiplicar el mensaje a transmitir **x(t)** por la portadora cosenoidal y, a su vez, sumarle esa portadora cosenoidal. En la ilustración 5 se muestra:

La señal moduladora, un coseno de baja frecuencia en el que va la información que queremos transmitir.

La señal portadora, otro coseno de alta frecuencia que no lleva ninguna información.

La señal modulada, la señal que nos queda tras aplicar la modulación en AM.

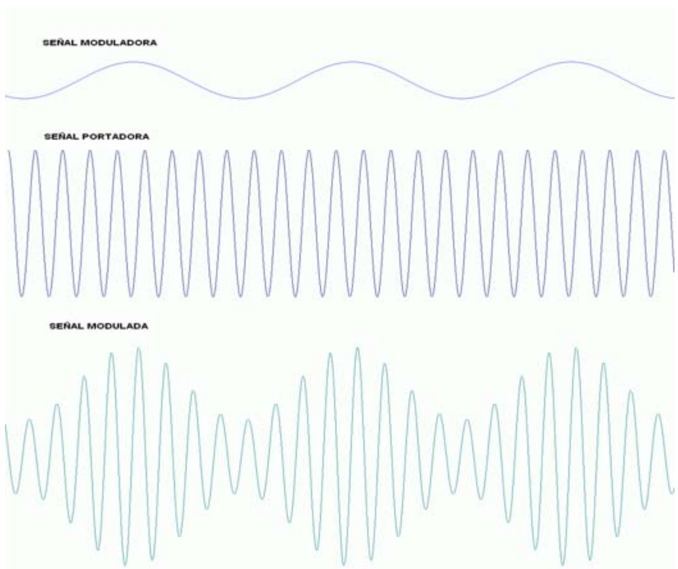

Ilustración 5. Modulación AM.

Modulación FM

La frecuencia modulada (FM) o modulación de frecuencia es una modulación angular que transmite información a través de una onda portadora variando su frecuencia.

Es usada comúnmente en las radiofrecuencias de muy alta frecuencia por la alta fidelidad de la radiodifusión de la música y el habla. El sonido de la televisión analógica también es difundido por medio de FM. También se utiliza para comunicaciones de voz en la radio comercial y en las configuraciones de aficionados. Además, se utiliza como ayuda en navegación aérea.

En el caso de la modulación FM, no entraremos en mucho detalle en su definición matemática por ser más compleja. Pero en la ilustración 6 se muestra una modulación en FM: la señal a) es la portadora, de mayor frecuencia; la señal b) es la señal moduladora, en la que va la información que

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 26 – ENERO 2010

queremos transmitir y la señal c) es la señal modulada, podemos observar como en el caso de la modulación FM la amplitud permanece constante cuando hay variaciones de la señal moduladora, ahora es la frecuencia la que va a variar.

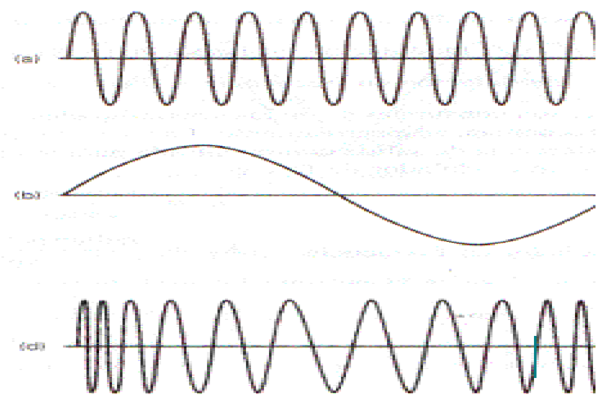

Ilustración 6. Modulación FM.

4. USO DE HERRAMIENTAS TIC.

El uso de herramientas TIC a la hora de estudiar las funciones circulares es de gran utilidad, ya que no solo facilitan la representación gráfica de las funciones circulares, sino que muestran esta con una completa exactitud, de forma que para el alumno sea más fácilmente comprensible. Esto también permite al profesor mostrar al alumno la dualidad entre la exactitud se consigue con las herramientas TIC y las aproximaciones en la representación hechas en el papel.

4.2 ACTIVIDADES CON LA CALCULADORA.

Es destacable la experiencia hecha en Francia entre 1995 y 1997 por Michele Artigue , sobre el uso de calculadoras gráficas en clase de Matemáticas. Al introducir una expresión en la TI-92 o en la TI-89, el estudiante se enfrenta con el resultado de una evaluación realizada automáticamente por la calculadora. Este resultado puede ser muy diferente a la expresión inicial el estudiante está en una posición diferente de aquella que corresponde al trabajo en papel y lápiz en la que, simplificando gradualmente, él sabe cuáles son las diversas expresiones intermedias que él mismo ha producido.

Ruthven (1990) sostiene que una mayor exposición a imágenes gráficas simbólicas a través del uso regular de la calculadora gráfica, incrementa la competencia y la confianza de los estudiantes. Por lo tanto, la representación gráfica con calculadora de las distintas funciones trigonométricas es recomendable a la hora de abordar el estudio de las funciones circulares.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 26 – ENERO 2010

4.1 ACTIVIDADES CON EL ORDENADOR.

Lo que en primer lugar se pide del software y de las herramientas de cómputo es que sean instrumentos pedagógicos. Deben permitir aprender mejor el contenido y los valores de las matemáticas que han sido definidos sin tomar en cuenta estas herramientas.

Los americanos piensan que el alumno tiene grandes dificultades de trasladar los conceptos adquiridos delante del ordenador a otras situaciones, y más especialmente si el ordenador es utilizado muy espaciadamente. En su investigación Doerr y Zangor (2000) sugieren que son necesarias más de 10 sesiones seguidas con ordenador para adquirir los esquemas de uso del ordenador necesarios para tener el comportamiento que espera el profesor.

Por lo tanto, las herramientas usadas con el ordenador para el estudio de las funciones circulares deberán ser simples en su utilización. Por ello es recomendable el uso del proyecto Descartes, u otros métodos parecidos, en los que el uso del software sea relativamente simple.

5. BIBLIOGRAFÍA.

- Ian Stewart, *Historia de las matemáticas, Crítica, 2008. ISBN 978-84-8432-369-3*
- LAGRANGE J.-B. : 1999, 'Complex Calculators in the Classroom: Theoretical and practical Reflections on Teaching Pre-Calculus', *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 4 (1) 51-81
- Bendat J.S.; Piersol A.G. :"Random Data:Analysis and Measurement Procedures".Wiley Interscience, NY 1971.
- TALL, D.: 'Graphical Packages for Mathematics Teaching & Learning', *Informatics and the Teaching of Mathematics*, Elsevier Science Publishers B. V. (North-Holland).
- J.G. Proakis, M. Salehi, "Communication systems engineering", 2nd ed., Prentice-Hall 2002
- Proyecto Descartes; Ministerio de Educación. Disponible en: http://descartes.cnice.mec.es/ ; accedido en noviembre; 2009.

Autoría

- Nombre y Apellidos: Maria del Carmen Cabrera Martín
- Centro, localidad, provincia: Málaga.
- E-mail: emsy84@gmail.com