ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 28 – MARZO DE 2010

“TALLER DE MATEMÁTICAS: EL NÚMERO ÁUREO”

AUTORÍA **BLANCA FERNÁNDEZ PÉREZ**
TEMÁTICA **MATEMÁTICAS**
ETAPA **ESO**

Resumen

Uno de los objetivos que debemos desarrollar en nuestros alumnos es que sean capaces de identificar las relaciones espaciales de la vida cotidiana, ser sensible a la belleza que generan y ser capaces de apreciar la belleza matemática. Y, qué mejor forma puede ser que a través del número áureo tan presente en nuestro alrededor y en ocasiones desconocido. Este artículo da algunas ideas de cómo trabajar el número de oro en el taller de matemáticas.

Palabras clave
Matemáticas, número áureo, rectángulo áureo, Pitágoras.

1. EL NÚMERO

El número áureo o de oro, también llamado proporción áurea, proporción divina, razón dorada, razón áurea, número dorado o incluso el número de dios; representa la proporción más bella presente en la naturaleza. De ahí la frase “*si Dios existe, es matemático”.*

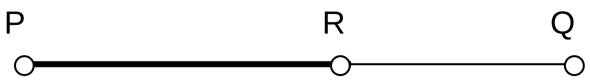
Fue Pacioli quién lo denominó proporción divina y Leonardo el que llamó sección áurea. Pero se usa la letra (phi) para representar la sección áurea, recordando la inicial de Fidias, arquitecto del Partenón.

El número aparece una y otra vez ligado a la naturaleza y al arte. Aparece en el estudio del crecimiento de las plantas, los girasoles, la distribución de las hojas en un tallo, la estructura de caracolas… y en cualquier estudio armónico del arte o incluso de nuestro propio cuerpo. Además está relacionado al denominado rectángulo de oro y a la sucesión de Fibonacci, como veremos más detenidamente posteriormente.

REVISTA DIGITAL INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 28 – MARZO DE 2010

Los griegos se preocuparon por la medida, comparación con la unidad. Establecieron relaciones entre pares de medidas, la razón o cociente. Y fue seguramente el estudio de las proporciones y de la medida geométrica de un segmento, por parte de los griegos, lo que llevó a su descubrimiento.

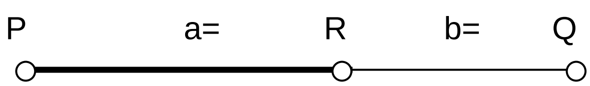


Un segmento PQ queda dividido por un punto interior R, según la razón áurea, cuando la razón entre el segmento completo y la mayor de sus divisiones es igual a la razón entre la división mayor y la menor; en esas condiciones, el número que representa esa proporción es . Esto nos lleva a que $\frac{PQ}{PR}=\frac{PR}{RQ}=\phi$, lo que puede ser expresado también como $\frac{PR \bullet RQ}{PR}=\frac{PR}{RQ}=\phi$; y, haciendo operaciones, llegamos a que $1+\frac{1}{\phi}=\phi$; de donde $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ o expresado su valor numérico en forma decimal 1,618033989… con infinitas cifras decimales sin que exista secuencia de repetición.

1.1. Actividades que podemos proponer en el taller:

A continuación propongo una serie de actividades para que mediante el cálculo de proporciones de varios ejemplos descubran el número áureo. Pongo sólo algún ejemplo, pues el resto serían análogos.

1.1.1. La Divina Proporción



PR=	RQ=	Φ=
$\frac{PR}{RQ}=$	$\frac{PQ}{PR}=$	

1.1.2. Cálculo geométrico de la sección áurea

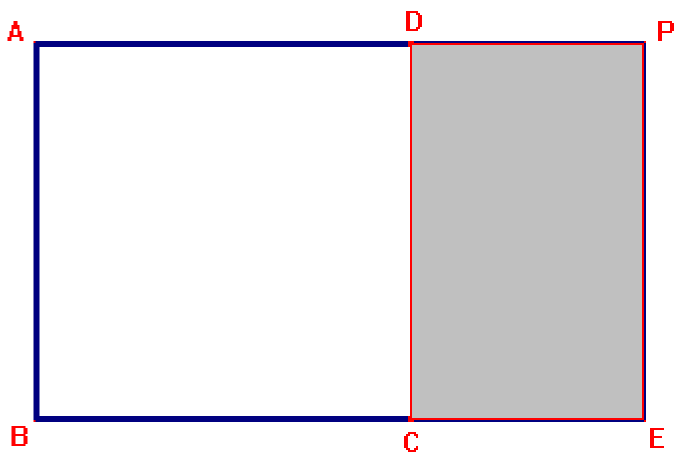
	PR=	RQ=	
PQ=18	$\frac{PR}{RQ}=$	$\frac{PQ}{PR}=$	Φ=

	PR=	RQ=	
PQ=8	$\frac{PR}{RQ}=$	$\frac{PQ}{PR}=$	Φ=

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 28 – MARZO DE 2010

PQ=12	PR=	RQ=	Φ=
	$\frac{PR}{RQ} =$	$\frac{PQ}{PR} =$	

1.1.3. El rectángulo de oro



Cuadrado: ABCD

Rectángulo: CEPD

Rectángulo: ABEP

CEPD $\approx$ ABEP

ABEP=Rectángulo de ORO

BE=18	EP=	$\frac{BE}{EP} =$
EP=	DP=	$\frac{EP}{DP} =$

BE=20	EP=	$\frac{BE}{EP} =$
EP=	DP=	$\frac{EP}{DP} =$

BE=	EP=10	$\frac{BE}{EP} =$
EP=	DP=	$\frac{EP}{DP} =$

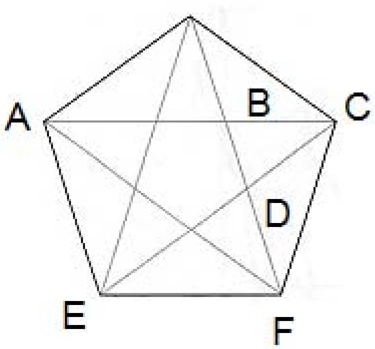
Actividad:

- Comprueba si tu DNI es un rectángulo de oro.
- ¿Y el A4 donde realizas las actividades?

Podemos apreciar, por tanto, el rectángulo áureo en nuestra vida cotidiana: tarjetas de crédito de nuestros padres o incluso en las cajetillas de tabaco que no debemos fumar.

2. PITAGÓRICOS Y LA SECCIÓN ÁUREA

La estrella de cinco puntas, símbolo de los pitagóricos, conocida también como pentagrama pitagórico o místico, está profundamente relacionada con la sección áurea. Pues, escondido dentro del símbolo de los pitagóricos se encontraba el número .



Observemos el pentagrama pitagórico, inscrito en un pentágono regular. Por comodidad, supongamos que la medida del lado del pentágono es de una unidad; entonces, la medida de la diagonal del pentágono (o, equivalentemente, el lado de la estrella de cinco puntas) es . En efecto, los segmentos AB y EF son paralelos, como también lo son AE y BF. Puesto que estamos partiendo de un polígono regular, AE=EF; y, por ello, los cuatro segmentos mencionados tienen la misma longitud, que habíamos convenido que fuera de una unidad. Utilizando ahora el teorema de Thales y razonamientos de simetría en la figura, se puede probar que $\frac{CA}{AE}=\frac{CB}{BD}$ o, equivalentemente, que $\frac{1+CB}{1}=\frac{CB}{1-CB}$, lo que prueba que ambos segmentos son proporcionales, de acuerdo con la divina proporción. Operando en esa igualdad se deduce que $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, lo que puede resumirse diciendo que el lado del pentagrama pitagórico inscrito en un pentágono de lado unidad coincide con el número áureo.

Decía antes que los pitagóricos encontraron que su símbolo se encontraba la divina proporción, pero también fueron capaces de darse cuenta de que en el pentagrama que los identificaba había números "raros", refiriéndose al $\sqrt{5}$ que aparece en la expresión de . Fueron capaces de probar que esos números no podían escribirse como una fracción (a esos números hoy los conocemos como números irracionales) y se referían a este hecho diciendo que "la diagonal y el lado de un pentágono regular son inconmensurables" (en el sentido de que aun dividiendo el lado en fracciones muy pequeñas nunca se podrían medir la diagonal). De hecho, el pentagrama pitagórico está lleno de segmentos dispuestos conforme al número áureo: si elegimos un segmento cualquiera dentro del pentagrama y el de tamaño inmediatamente inferior, el cociente de las longitudes de esos dos segmentos es exactamente la divina proporción .

Además, esto pueden verlo nuestros alumnos en la película "El pato Donald en el país de las matemáticas."

REVISTA DIGITAL INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 28 – MARZO DE 2010

3. LA SUCESIÓN DE FIBONACCI

Para introducir la sucesión de Fibonacci en el aula propongo el siguiente juego:
Será necesario, además de utilizar lápiz y papel, hacernos con una calculadora opcional o la utilización de una hoja de cálculo.
Comenzamos las instrucciones:

1. Anota en una hoja de papel, en vertical, los números del 1 al 20, para formar una lista.
2. Al lado del 1 escribe un número de 1, 2 o 3 cifras, el que quieras.
3. Al lado del número 2 escribe otro número (o el mismo) de 1,2 o 3 cifras.
4. En el tercer lugar de la lista escribe la suma de los dos primeros números escritos.
5. En la cuarta posición anota la suma de los números segundo y tercero.
6. En la quinta escribirás la suma del tercero y el cuarto. Continúa así rellenando las 20 posiciones de la lista (cada hueco se rellena con la suma de los dos números anteriores).
7. Copia aparte el número que ocupa la posición 20 y divídelo entre el que ocupa la posición 19.
8. Recuerda que tú escribiste los números que quisiste al principio. No obstante, tengo una predicción del resultado de la división y debes mirar la figura phi para ver cuál es.

Los 20 números que han escrito para realizar el juego se han construido del mismo modo como se forma la sucesión de Fibonacci.

La historia de Fibonacci y su sucesión es por sí misma interesante. Leonardo era el hijo de un comerciante de Pisa llamado Bonaccio; por ello se le conocía como Fibonacci (el hijo de Bonaccio). La posición social y los negocios que tenía Bonaccio permitieron que su hijo estudiara en contacto con culturas diferentes a la de la Europa medieval, pudiendo aprender así el sistema de numeración hingú-arábigo. Su libro *Liber Abaci*, escrito en 1202, es la primera referencia occidental donde aparecen los números arábigos: se describe el cálculo con ellos y se recomienda fuertemente su uso. Uno de los problemas propuestos era el ya famoso problema de los conejos:

"*Un granjero sitúa una pareja de conejos en un lugar cerrado por una valla por todos los lados. ¿Cuántas parejas de conejos pueden producir esa pareja en un año si se supone que mensualmente cada pareja se reproduce, dando lugar a una nueva pareja, que a su vez, se vuelve productiva a partir del segundo mes de existencia?*".

En el segundo mes es fácil intuir que habrá una pareja, la misma que en el primero, y que en el tercero habrá dos parejas, la que tenemos desde el principio y una recién nacida. Fibonacci calculó el número de parejas que habrá una vez transcurridos doce meses, es decir, los trece primeros términos de la hoy conocida como sucesión de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233. Observamos que cada número se obtiene mediante la suma de los dos anteriores (del mismo modo que calculábamos las diferentes cantidades que se necesitaban en el juego anteriormente descrito).

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 28 – MARZO DE 2010

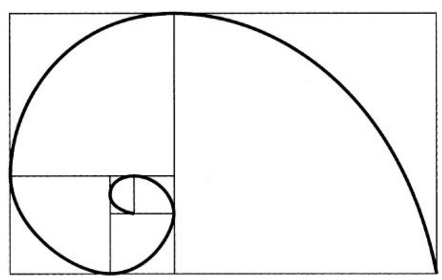
El valor a_n de la sucesión de Fibonacci representan las parejas de conejos que habría en el instante n. El término general de una sucesión es una fórmula que indica, en función de n, el valor de a_n. La sucesión de Fibonacci es muy fácil de definir por recurrencia $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$, pero no tan fácil mediante su término general. En realidad, éste se calcula mediante la fórmula:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

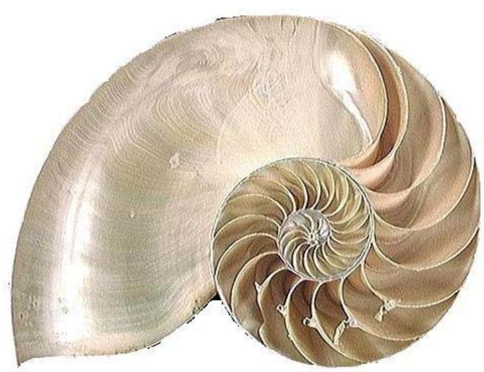
El límite de la sucesión de Fibonacci, es el límite de los cocientes de términos consecutivos $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ que es la razón áurea, como también lo es el límite de la sucesión de Fibonacci generalizada que utilizábamos en nuestro juego (la forma de construirla es análoga a como Leonardo de Pisa construyó su sucesión; la única diferencia está en que partimos de dos números iniciales diferentes).

La divina proporción aparece por todas partes.

4. POR TODAS PARTES APARECE



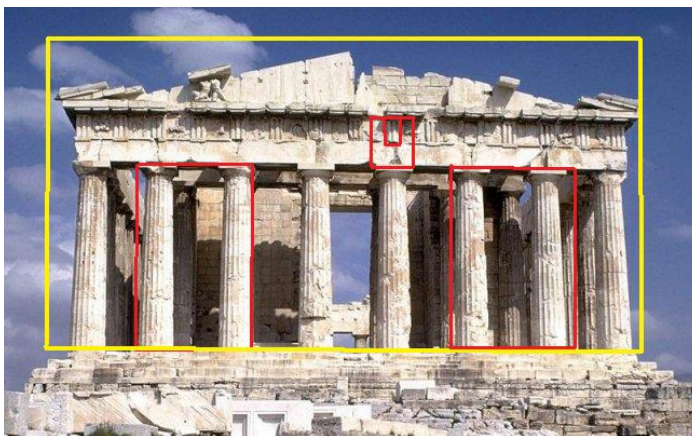
Los números que conforman la sucesión de Fibonacci aparecen en multitud de ejemplos en la naturaleza. En los rectángulos de Fibonacci, correspondientes a los diez primeros términos de la sucesión de Fibonacci: los lados de cada uno de esos rectángulos se obtienen como suma de los lados de rectángulos más pequeños. La construcción que hemos hecho podría repetirse, generando una mayor cantidad de estos rectángulos sin más que levantar un cuadrado sobre el lado mayor del último rectángulo construido. El cociente de las longitudes de sus lados es una aproximación a la divina proporción.



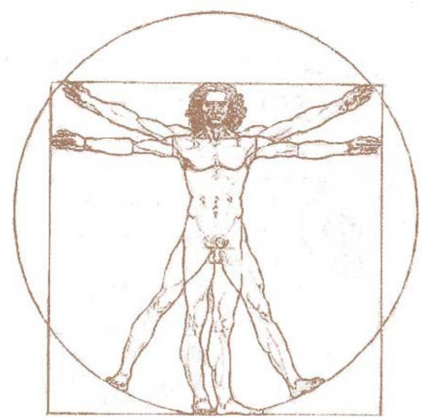
Inscribiendo un cuarto de circunferencia en cada uno de los cuadrados que sirven de apoyo para la construcción de los rectángulos de Fibonacci, obtenemos una espiral logarítmica, que determina la forma de la concha de algunos moluscos, como el Nautilus, que tiene interés por sí mismo, al ser cefalópodos. En el reino vegetal podemos encontrar números de Fibonacci en los girasoles: las semillas de girasol (las comunes pipas) se disponen en forma de espiral. Unas de estas espirales se orientan en sentido horarios; y otras, en sentido anti horario y las orientadas en sentido anti horario. Se encuentran que ambos números son números de Fibonacci consecutivos. En la distribución de piñones en las piñas también tenemos un ejemplo parecido.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 28 – MARZO DE 2010

En el arte este número representaba la auténtica clave para conseguir la belleza en las proporciones. En varias de las medidas geométricas del Partenón de Atenas aparece la razón; en el conocido Hombre de Vitrubio, dibujado por Leonardo, aparece de nuevo esta proporción, así como en cuadros de otros autores, como en la *Alegoría de la primavera*, de Sandro Boticelli o en varios cuadros de Salvador Dalí-quien llegó más lejos, haciendo la composición de su cuadro *Leda atómica* sobre el pentagrama místico de los pitagóricos-.



Partenón de Atenas



Hombre de Vitrubio

Pueden nuestros alumnos apreciar como el número de oro se encuentra en nuestro cuerpo como actividad divertida. En la relación entre nuestras manos y la longitud de los dedos, y la relación entre nuestra altura y la distancia del ombligo a los pies. *"Coge una cinta métrica y encuentra el número de oro en tus compañeros".*

Incluso podemos apreciar esta divina proporción en la música. Pues son varias las sonatas para piano de Mozart, donde podemos encontrarla: el primer movimiento de la Sonata nº1 está subdividido en 38 y 63 compases (63/38=1,6315) y el segundo movimiento en 28 y 46 compases (46/28=1,6428). Además, la Quinta Sinfonía de Beethoven distribuye el tema según la proporción aurea.

5. MÁS POSIBLES ACTIVIDADES A PROPONER

Actividad 1

El número áureo aparece en los sitios más insospechados. Veamos un ejemplo para realizar con la calculadora o la hoja de cálculo, donde el argumento del procedimiento es la idea de límite. Supongamos que antes de empezar con el bucle siguiente tenemos la calculadora con un 0 en la pantalla y preparada para hacer operaciones. El bucle lo podemos repetir tantas veces como queramos.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 28 – MARZO DE 2010

Instrucciones:

1. Pulsa +
2. Pulsa 1
3. Pulsa =
4. Pulsa √
5. Vuelve al paso 1

En realidad, esas 5 instrucciones nos hacen calcular los términos de la sucesión numérica:

$$\sqrt{1},\ \sqrt{1+\sqrt{1}},\ \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}},\ \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}\ldots$$

que tiene por límite a

Propuestas de lectura: El capítulo 5 del libro "Matemagia" de Fernando Blasco

Propuestas de video: "El pato Donald en el país de las matemáticas".

Propuestas de trabajos de investigación, que se podrán exponer en las paredes del instituto:

1. La norma DIN: A0, A1, A2,...
2. Fotos de los monumentos: Pirámide de Keops, Notre Dame de Paris, el Partenón, etc.
3. Dibujar rectángulos y comprobar si son o no áureos.
4. Dibujo del segmento de los griegos y ecuación de segundo grado de donde sale el número áureo. Ángulos en la circunferencia que dan el número de oro
5. Espiral de Durero dibujada y acompañada de alguna foto.
6. Símbolo pitagórico. Dibujo y explicación de donde sale el nº de oro.
7. Altura y anchura de huevos de gallina. Dibujos y fotos.
8. Objetos cotidianos: tarjetas de crédito, cajas de conservas, caracolas, estrellas de mar, corte de una manzana... Relación con el número de oro.
9. El número de oro y la poesía
10. Sucesión de Fibonacci. Relación con el número de oro.
11. El número de oro en la Alhambra.
12. Edificios que contienen el número de oro: Puerta de Alcalá, Palacio de Oriente, Museo del Prado...
13. Proporciones del cuerpo humano: Leonardo da Vinci
14. Edificios del arquitecto Calatrava: aeropuerto de Bilbao, estación de ferrocarril de Lyon...

Páginas webs:

http://rt000z8y.eresmas.net/El%20numero%20de%20oro.htm
http://www.juntadeandalucia.es/averroes/html/adjuntos/2008/01/18/0003/index.html
http://descartes.cnice.mecd.es/Geometria/belleza/canonraizdos.htm

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 28 – MARZO DE 2010

http://descartes.cnice.mecd.es/Geometria/belleza/canonaureo.htm
http://www.epsilones.com/paginas/a-bestiario.html#bestiario-razonaurea
http://personal.telefonica.terra.es/web/imarti22/actividades/actividades/numero/marco_numero.htm
http://www.divulgamat.net/weborriak/Exposiciones/Expode/Dali/Archivos/dali18.pdf
http://thales.cica.es/files/glinex/practicas-glinex05/matematicas/oro/El_nzmero_de_oro.pdf

6. BIBLIOGRAFÍA.

[1] Blasco, F. *Matemagia*. Ed. Planeta
[2] http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/razon_aurea/aureo1.htm
[3] http://www.juntadeandalucia.es/averroes/html/adjuntos/2008/01/18/0003/index.html
[4] http://juegos-matematicos.blogspot.com/2009/02/glosario-matematico-el-numero-de-oro.html

Autoría

- Nombre y Apellidos: Blanca Fernández Pérez
- Localidad, provincia: Pinos-Puente, Granada
- E-mail: blancafdez399@hotmail.com