INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS
REVISTA DIGITAL

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 39 – FEBRERO DE 2011

"GEOMETRÍA"

AUTORÍA **CARLOS JAVIER GARCíA MACHADO**
TEMÁTICA **SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA**
ETAPA **EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA**

Resumen

Los conceptos más elementales de punto, recta, plano y las relaciones que se establecen entre ellos, desde las más sencillas a las más complejas, fueron sistematizados y ordenados, entre los años 330 y 275 a. C. en una de las obras más difundidas, junto con la Biblia de la historia de la humanidad: los *Elementos* (Stoikheia) de Euclides, en los que todo el saber geométrico de la época se condensa en trece libros. Euclides construyó la geometría utilizando tres herramientas conceptuales claves: los axiomas, los postulados y los teoremas. Los teoremas hacen referencia a proposiciones que no son evidentes y se demuestran, mediante un proceso lógico de razonamiento, a partir de los axiomas y los postulados.

En las últimas pruebas de diagnóstico había un ejercicio de geometría que casi ningún alumno supo realizar. En estas líneas se va a reflexionar sobre la forma de enseñar geometría en la ESO.

Palabras clave

Demostración, geometría.

1. INTRODUCCIÓN

Desde hace tiempo se viene observando un creciente fracaso en la enseñanza de la Geometría Sintética. Los libros de texto y los modos de enseñanza acerca de este tópico dejan mucho que desear.

En primer lugar, quiero señalar, la dificultad que encierra el tratar de precisar el punto de partida, cosa que los libros de texto olvidan por completo.

La Geometría Sintética puede ser una de las más hermosas ramas de las matemáticas pero, la mayoría de las veces uno se encuentra incierto, el camino seguido está lleno de lagunas como por ejemplo el concepto de sentido o el de ángulos iguales.

Es asombroso comprobar hasta qué punto las investigaciones de los últimos siglos han carecido de influencia en la enseñanza de la Geometría Sintética. Cuando se poseen actualmente todos los

REVISTA DIGITAL INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 39 – FEBRERO DE 2011

elementos para construir una exposición a la vez coherente y sencilla, y trabajos como los de P. Adam y Hilbert han aclarado por completo la naturaleza y la función de los axiomas, los libros de texto, en cuanto concierne a los fundamentos, se mantienen con frecuencia inferiores a los *Elementos*.

Quizá se deba tener en cuenta lo estricto de los currículos. Para los autores de libros de texto, el tener que ceñirse a un currículo determinado, es una preocupación que puede ocultarle algunos problemas fundamentales.

De todas formas, no pienso en una exposición axiomática rigurosa de la Geometría Sintética en estos niveles (ESO). Pero sí, en cambio, que los profesores tengan una idea clara de lo que debe ser una exposición de este tipo, cuáles son las definiciones más adecuadas y el orden que se debe seguir en la presentación de los contenidos.

Una vez el profesor tenga claras las ideas, adaptará sus enseñanzas al nivel y exigencias de sus alumnos, recordando siempre que lo esencial es el armazón, sobre todo en las definiciones. Una de las preocupaciones del profesor debe ser dar facetas cada vez más claras, y esto no podrá hacerlo si no conoce a fondo su materia.

2. LOS LIBROS DE TEXTO

Ya dije antes, de forma un poco vaga, que parte del fallo estaba en los libros de texto. No pretenden hacer una exposición deductiva de la Geometría; más bien parece que su propósito es presentar al alumno algunas propiedades de las figuras usuales, haciéndolas aceptables, bien recurriendo a esquemas extraídos del mundo físico, bien por razonamientos parciales.

Una de las razones por las que nos podríamos quejar es que en ellos, el postulado de Euclides es tratado con excesiva veneración, del todo incomprensible, ya que se puede sustituir por axiomas que resultan mucho más intuitivos, como:

1. Existe un cuadrado, al menos (cuadrilátero de lados iguales y ángulos rectos).

   O bien:

2. Todo cuadrilátero está contenido en un triángulo.

O bien:

3. Dos rectas paralelas a una tercera son paralelas entre sí.


Pero la mayor parte de los libros de texto no se contentan con tales exposiciones intuitivas y quieren justificar, en la medida de lo posible, los primeros pasos en los razonamientos geométricos.

En los mejores de estos libros están correctamente explicados algunos axiomas. Sin embargo, es frecuente ver que en lugar de resultar excesivos, sólo aparece un número insuficiente de

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 39 – FEBRERO DE 2011

ellos. Falta a veces, por ejemplo, un axioma que justifique la posibilidad del giro de una figura alrededor de una recta. Muchas más veces aún, lo que ocurre es no hay un concepto claro de lo que es un axioma. Por ejemplo, el siguiente texto:

"*Un axioma es una proposición evidente por sí misma. Ejemplo: dos cantidades iguales a una tercera son iguales entre sí. Un postulado es una proposición que se admite sin demostración.*"

En otros textos se encuentra una confusión entre la noción de verdad matemática y la de adaptación de las matemáticas al mundo físico: se distingue entre las propiedades evidentes y las que no lo son y que "*no obstante son verdaderas, por cuanto son comprobables por la experiencia y por las consecuencias que de ellas se deducen. Tales proposiciones, verdaderas, pero imposibles de demostrar, se llaman postulados*".

En estos mismos textos, después de enunciar el axioma: "Por dos puntos pasa una recta y una sola" podemos leer "Diremos que ésta es una propiedad característica de la recta, lo que significa que, entre todas las líneas, la recta es la única que tiene esta propiedad".

Desde luego que si este es un axioma característico, ya no se ve la necesidad de otros nuevos.

No debemos obviar la dificultad que se encuentra cuando tratamos de explicar la función de los axiomas a los alumnos de ESO; los conceptos geométricos de éste dependen aún en gran modo de su experiencia sensible, y como todavía no ha manejado otro juego que el de la geometría clásica, no puede darse cuenta de que las reglas de este juego no son absolutas, ni de que igualmente podían haber sido elegidas otras tan razonables y tan próximas al mundo físico como aquellas.

La función de los axiomas puede explicarse de distintas formas. Una de ellas podría ser diciéndoles que los puntos rectas o círculos van a ser entes nuevos de los que nada se conoce y, por el momento, sus propiedades, incluso las más triviales, nos son desconocidas. La geometría sería como un juego sobre estos seres, de los que conoceremos algunos datos, y de cada uno sabremos alguna cualidad que lo caracterice y describa aunque sea parcialmente. Su participación en el juego consistirá en descubrir cuál ha de ser el comportamiento de estos seres en determinadas circunstancias.

Esta situación presenta cierta analogía con la que ofrece una novela. El autor empieza por hacer aparecer a varios seres: hombres o mujeres, lugares y tiempos. La primera parte del libro suele dedicarse a describir las relaciones que ligan a los distintos seres. En la segunda parte se propone un problema: ¿qué valor hay que dar a una incógnita para que, de las relaciones iniciales dadas en la primera parte, pueda deducirse otra relación también dada?

En buena parte, la novela podría terminar aquí, y en este punto sería el lector quien comenzara su trabajo intelectual. Sin embargo, casi siempre hay una tercera parte en la que el autor trata de dar su propia solución. Entonces suele verse que el sistema de relaciones iniciales era insuficiente, y para salvar la indeterminación el autor revela en el último momento una relación complementaria, hasta entonces desconocida, que resuelve enteramente el problema, es decir, que permite determinar la incógnita sin ambigüedad. Tal retraso de información no suele considerarse como falta grave por el lector y éste queda al final satisfecho.

REVISTA DIGITAL INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 39 – FEBRERO DE 2011

Pero no ocurre lo mismo cuando el sistema de relaciones iniciales (digamos los axiomas) es contradictorio, es decir, cuando tales relaciones permiten asegurar que la incógnita, que debería ser única, tiene varias posibilidades contradictorias entre sí. El lector diría que se encuentra ante un autor inhábil o de mala fe, y su interés por el juego propuesto desaparecería al momento.

En este nuestro juego de la geometría elemental confiamos ser lo bastante afortunados para que las relaciones iniciales que elijamos no ofrezcan contradicción.

Supongamos pues, vencido el peligro de la introducción parcial de los axiomas. Nos encontramos ahora con la siguiente situación: de un modo u otro hemos conseguido la posesión de un número de enunciados, que consideramos como ciertos, y que es suficiente, al menos en principio, para edificar de un modo riguroso el resto de la geometría.

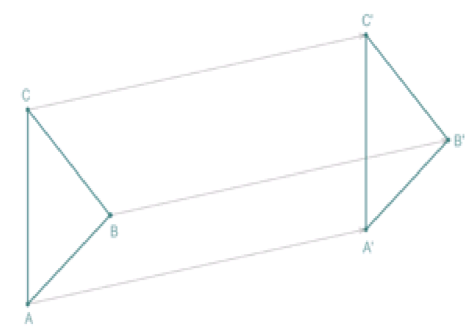
Parece que esta construcción no debe ya ofrecer obstáculo y que ha de desarrollarse sin tropiezos, pero no es así. Los casos de igualdad de triángulos, los desplazamientos, la orientación de las figuras y después la medida de las magnitudes (por ejemplo, la medida de los ángulos) son otros tantos momentos en los que se corre peligro de caer en pseudoteoremas y en definiciones equívocas.

IGUALDAD DE FIGURAS. MOVIMIENTOS

En realidad, es al psicólogo y al historiador a quienes corresponde explicar larga pervivencia de las definiciones que, aunque carentes de sentido, son utilizadas casi universalmente cuando se llega a la teoría de los movimientos. Es frecuente olvidar en este punto que una definición sólo debe utilizar términos que a su vez hayan sido definidos anteriormente; dicho de modo más preciso: los únicos términos que no tienen necesidad de definición son los que figuran en los axiomas. Los demás deben definirse progresivamente a partir de aquellos.

Veamos algunos ejemplos de tales definiciones:

Igualdad de dos figuras: “Se dice que dos figuras son iguales cuando son superponibles, lo que quiere decir que se puede transportar una sobre la otra hasta conseguir una coincidencia perfecta.”



No es sólo que los términos *superponibles*, *transportar* y *coincidencia* no han sido definidos hasta entonces, sino que, además, una definición como esta produce una molesta confusión entre la igualdad de dos figuras y su superponibilidad por un movimiento continuo.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 39 – FEBRERO DE 2011

Veamos otro ejemplo, más peligroso que el anterior, porque este de ahora nos lleva a consecuencias erróneas:

"Si dos figuras planas son tales que a tres puntos cualesquiera de la primera A, B, C; corresponden siempre tres puntos de la segunda A', B', C'; de tal modo que determinen un triángulo igual al ABC, dichas dos figuras son iguales."

No insistiremos diciendo que la igualdad de triángulos no ha sido definida, pero sí observaremos que de esta definición resulta que toda figura *E* contenida en otra *E'* es siempre igual a ésta.

El origen de las dificultades no está siempre en lagunas de este tipo, claramente perceptibles, sino que a veces queda disimulado entre los términos que en general se consideran como bien definidos. Tomemos como ejemplo la palabra *triángulo*. Tanto es la figura formada por tres rectas como la formada por tres segmentos AB, BC, CA; otras veces, en cambio, hay que sobreentender, sin previo aviso, que se trata del conjunto de los tres vértices. Quizá se deba todo al peligro de la palabra *figuras* que, en la mente de quien la utiliza, no designa un conjunto preciso de puntos, sino todos aquellos que, asociados a un cierto conjunto mínimo, pueden deducirse por una cierta construcción precisa; por ejemplo, las alturas de un triángulo se consideran como pertenecientes a éste.

Para evitar este peligro, abandonaremos sistemáticamente la palabra *figura* y emplearemos en su lugar la palabra *conjunto*.

Terminando estas consideraciones haré ver cómo pueden obtenerse curiosos teoremas si se admiten definiciones como las que acaban de ser criticadas.

<u>Teorema.-</u> Sean un triángulo esférico ABC y un triángulo plano A'B'C'. Para que estos triángulos sean iguales es necesario y suficiente que sus lados sean iguales dos a dos (AB=A'B'; BC=B'C' y CA=C'A').

<u>Demostr.</u> Si los triángulos son iguales, evidentemente, sus lados son iguales dos a dos. Veamos el recíproco. Supongamos que AB=A'B'; BC=B'C' y CA=C'A'. Mediante un movimiento llevemos A sobre A' y B sobre B', que siempre es posible porque AB=A'B'. Si C y C' quedan situados a distinto lado de AB, una simetría o un giro alrededor de AB lleva C' al mismo lado que C, por lo que siempre podemos suponer que nos encontramos en este caso. Si C y C' no coincidieran, su mediatriz, que es única, contiene a A y a B por ser AC=AC' y también BC=BC', luego tal mediatriz coincide con AB; pero esto no es posible porque entonces C y C' estarían a distinto lado de AB. Luego C y C' coinciden.

ORIENTACIÓN DE LAS FIGURAS

No comentaremos detalladamente la teoría de la orientación, que siempre está basada en consideraciones intuitivas y que invariablemente utiliza un observador exterior al plano.

No parece sino que los libros de texto han admitido de una vez para siempre la imposibilidad de dar de la orientación definiciones matemáticas correctas. Veamos, por ejemplo, una de las mejores definiciones de movimiento que pueden encontrarse en los libros de texto: "Las figuras F y F' se deducen una de la otra mediante un movimiento si existe, entre F y F', una correspondencia biunívoca tal que si A y B son dos puntos cualesquiera de F se tenga A'B'=AB y si A, B, C son tres puntos cualesquiera de F, los ángulos orientados ACB y A'C'B' son iguales", habiéndose definido antes la noción de orientación del modo habitual, es decir, utilizando un observador ficticio. Y no queda sino aceptarla si se observa que la noción de orientación está basada sobre la estructura del conjunto de las isometrías planas y que por ello su definición supone otras definiciones, exentas de ambigüedad, de la igualdad y de los desplazamientos.

El uso de este hombrecillo rígido está tan arraigado y parece ten fundamental que, incluso en los mejores textos, la igualdad de los ángulos orientados precede siempre a la igualdad directa de figuras.

3. ELECCIÓN DEL SISTEMA DE AXIOMAS

Hilbert fue el primero que liberó los axiomas, explícitos e implícitos, que formaban parte de la geometría de Euclides. Los axiomas quedan divididos en cuatro grupos: ocho axiomas de asociación, cuatro axiomas de orden, seis axiomas de congruencia y, por último, el axioma de las paralelas. El axioma de Arquímedes y el de continuidad quedan un tanto aparte y, al menos para iniciar la geometría, no son esenciales.

Así, pues, tenemos la geometría de Euclides basada en 19 axiomas. Realmente este número parece un tanto elevado, pero puede esperarse que estos axiomas se agrupen alrededor de nociones intuitivas tan simples que su necesidad sea indiscutible.

Así ocurre, efectivamente, para la mayor parte de ellos: los axiomas de asociación, los tres axiomas de orden referentes al orden sobre la recta y los tres axiomas de congruencia referentes a la congruencia de los segmentos de recta.

Se puede opinar, en cambio, que el axioma de Pasch referente a la intersección de una recta con los lados de un triángulo hace intervenir una figura demasiado complicada y enuncia una propiedad que no se utiliza explícitamente con frecuencia. Una de sus consecuencias más importantes es que toda recta de un plano divide a éste en dos partes unívocamente determinadas. Es incómodo que esta consecuencia tenga un enunciado más sencillo y utilice una figura más elemental que el axioma mismo. En realidad, el alumno admitirá más fácilmente como verdad primera la división del plano por una recta que el axioma de Pasch.

Los enunciados se complican aún más cuando se llega a los axiomas de congruencia. La congruencia de ángulos no se define directamente a partir de la congruencia de segmentos; en principio no es, esencialmente, sino una relación de equivalencia en el conjunto de los ángulos. La necesaria relación entre la congruencia de segmentos y la de ángulos se establece más tarde mediante el axioma siguiente:

"Si en dos triángulos, ABC y A'B'C', existen las congruencias AB=A'B'; AC=A'C'; ángulo BAC=ángulo B'A'C', también existen las congruencias ángulo ABC=ángulo A'B'C'"

En realidad, equivale a decir que se admite una parte del enunciado de uno de los casos clásicos de igualdad de triángulos, y está bien claro que la elección de esta parte es bastante arbitraria.

Posteriormente se demuestra la segunda parte del enunciado clásico, es decir, que con las mismas hipótesis anteriores, también es BC=B'C'. Todo ello puede parecer a los alumnos no sólo

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 39 – FEBRERO DE 2011

arbitrario, sino vacío de sentido, por cuanto se llegaría a la misma situación sustituyendo el axioma citado por otro enunciado cualquiera, de los casos clásicos de igualdad de triángulos.

Parece evidente que si no se quiere dar al alumno la impresión de que las matemáticas son un juego estéril, donde se comienza por admitir en primer lugar complicadas propiedades para deducir después de ellas otras sencillas, es necesario que los axiomas tengan enunciados sencillos que no utilicen sino conceptos a los que los alumnos ya están habituados, que sean directamente transportables a su experiencia y que, además, sean eficaces, es decir, permitan establecer rápidamente propiedades sustanciales.

¡Abajo Euclides!

Esta exclamación se puede leer en un libro publicado en 1968 por uno de los más importantes matemáticos del grupo Bourbaki, Jean Dieudonné (1906-1992), titulado Álgebra lineal y geometría. La geometría elemental no debía seguir siendo enseñada siguiendo la pauta de los *Elementos* y sin recurrir al álgebra. Esa geometría era una antigualla, afirmaba Dieudonné, porque ha quedado claro que bajo los estudios clásicos se escondía la limpidez de la moderna álgebra lineal. De la misma manera, la visión de las matemáticas bourbakista y en particular el papel primordial asignado a la teoría de conjuntos indujo en las décadas centrales del siglo XX a introducir en la enseñanza elemental en muchos países la llamada matemática moderna, que eliminaba el recurso a ideas intuitivas sobre la geometría.

En la enseñanza elemental se ha echado marcha atrás a la vista de los efectos negativos en el rendimiento escolar y en la actitud de los alumnos hacia las matemáticas, pero sigue hoy abierto el debate sobre la oportunidad de superar el estilo bourbakista en la exposición de la geometría en las aulas para transmitir una visión cabal de la disciplina, sus métodos y su relación con la ciencia y la cultura. El motivo es doble. En primer lugar, tal exposición refleja el modo en el que se presentan las teorías en su versión más elaborada, cuando ya han sido estudiadas y desarrolladas hasta llegar a formularlas de manera perfectamente rigurosa. En segundo lugar, la evolución histórica de las matemáticas muestra que es característico de esta disciplina la continua hibridación de teorías y conceptos, que se presentan una y otra vez bajo semblantes diversos, y es dudoso que la visión dominante en una cierta época sea la concepción definitiva: unas matemáticas sin memoria y sin pasado se empobrecen y empobrecen a quien se dedica a su estudio.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 39 – FEBRERO DE 2011

BIBLIOGRAFÍA

MATEMÁTICAS DE LA E.S.O.

Libros de texto.

- *Proyecto EXEDRA*. J.L. Sánchez González – Juan Vera López. Ed. Oxford.
- *Serie Aula abierta*. Colera – Gaztely- García. Ed. Anaya.
- *Sigma.* Vizmanos – Anzola. Ed. S.M.
- *Algoritmo.* Vizmanos – Anzola. Ed. S.M.
- *Orbita 2000*. Almodóvar – Gil. Ed. Santillana.
- Esteve – Ramírez. Ed. Ecir.
- *Miriada XXI*. Besora – Jané – Guiteras. Ed. McGraw Hill.
- *Axis*. Arias – Maya – Mercadé. Ed. Casals.

Autoría

- Nombre y Apellidos: Carlos Javier García Machado
- Provincia: Granada
- E-mail: cgmachado@gmail.com